Ulugbek J. Sodikov,
Senior lecturer,
Uzbekistan National University

Forming Students' Knowledge and Formalization, Solution and Interpretation Skills for Applied Mathematical Problems

Key words: *mathematical model, mathematical modeling, stages of solving applied problems, problematic task.*

Annotation: *in this paper analyzed the necessity of addressing to the tasks of the problematic – applied nature. The author examines the basic concepts of the theory of solving problems and approaches to learning to solve such problems using the methods of mathematical modeling.*

Рассматривая проблему развития способностей учащихся к творчеству в процессе обучения математике необходимо отметить особую значимость метода моделирования для развития творческой деятельности. Естественно, что на уроках математики на первый план выходит математическое моделирование процессов прикладного характера. Именно, математическое моделирование проблемных ситуаций прикладно-практического содержания должно стать базисом, ядром методики развития способностей учащихся к творчеству в условиях процесса обучения математике. Отметим, что математическая модель — это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений. Однако моделирование — это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять процессами, происходящими в окружающим мире. Следовательно, основной формой использования математики в естественнонаучных и других областях является математическая модель.

Одной из характерных особенностей задач прикладного содержания является то, что они имеют конкретную содержательную основу. Поэтому первым этапом обучения учащихся постановке и решению таких задач с использованием средств компьютерной техники, как показало наше исследование, стало формирование и моделирования конкретных явлений и ситуаций.

При разработке конкретных методических приёмов обучения учащихся математическому моделированию мы исходили, прежде всего из особенностей этого процесса.

Прежде чем какое-нибудь сложное явление природы или процесс подвергнуть математическому изучению, его необходимо упростить: из всего многообразия свойств, присущих явлению, отобрать лишь те, влияние которых будет учитываться: сделать некоторые упрощения о действующих в нем связях и о взаимодействии его с другими явлениями, т.е. необходимо описать это явление на языке математики. Описанное таким образом явление на языке математики *называют математической моделью*.

Такое понимание модели, как показало опытное исследование, более доступно учащимся. Любая математическая модель может быть получена тремя путями (3, р. 29):

1) в результате прямого наблюдения явления, его прямого изучения и осмысления;
2) в результате некоторого процесса дедукции, когда новая модель получается, как частный случай из некоторой более общей модели;
3) в результате некоторого процесса индукции, когда новая модель является естественным обобщением «элементарных» моделей.

Обучая учащихся моделированию, мы учитывали, что важнейшим требованием к математической модели (а, следовательно, и необходимым для понимания учащимся требованием) является требование её адекватности изучаемому реальному явлению, объекту, процессу и т.п. относительно выбранной системы его характеристик. Под этим понимается:

1) правильное качественное описание явления по выбранным характеристикам;
2) правильное количественное описание явления по выбранным характеристикам с некоторой разумной степенью точности.

При решении прикладных задач имеют место следующие основные этапы мыслительной деятельности:

1) математическая формулировка задачи, т.е. построение математической модели, математическое моделирование;
2) выбор метода исследования полученной математической задачи и выполнения исследования (внутримодельное решение математической задачи);
3) анализ и интерпретация полученного математического результата (1, р. 106).

Необходимо отметить следующее. Математическая модель строится логическим путем на основе отражения в сознании реального явления и опирается на владение языками описания математических моделей. Математическая модель в процессе решения задач замещает реальное явление и является упрощенной схемой и в силу этого объективно обладает определенными уровнями погрешности.

На первом этапе решения прикладных задач – этапе построения математических моделей – от учащихся требуется владение следующими знаниями, умениями и навыками:

1) умение выделят существенные стороны исследуемого явления;
2) знание различных языков описания математических моделей и умение ими пользоваться;
3) знание того, что каждая математическая модель обладает определенной степенью точности;
4) умение выделят факторы, вызывающие погрешность и умение простейшими способами её оценивать;
5) умение выделять составляющие рассматриваемых элементов и формировать критерии оценки их оптимальных взаимосвязей.

Второй этап решения задач прикладного характера – этап, на котором происходит выбор метода исследования полученной математической задачи, т.е. этап внутримодельного решения. На данном этапе требуется:

1) умение выбрать решение;
2) умение анализировать ход решения;
3) умение планировать процесс решения задачи по этапам;
4) владение навыками дедуктивных умозаключений.

Здесь же, учащимся необходимы такие знания, которые вытекают из представлений о специфике математических моделей и математического моделирования, а именно:

1) умение сопоставлять уровень погрешности вычислений с уровнем погрешности математической модели;
2) умение переходить от одной математической модели к другой;
3) умение находить наивыгоднейший метод решения;
4) умение качественно оценивать полученные количественные результаты на основе исходной информации.

Третий этап решения задач прикладного характера – этап реальной интерпретации полученного математического результата. На этом этапе решения прикладных задач необходимы:

1) умение переходить от общих утверждений к частным;
2) понимание природы частных решений задачи.

На этом этапе требуется также знания и умения, связанные со спецификой математического моделирования к которым относятся:

1) знание методов проверки соответствия полученных математических результатов исходной ситуации и умение их применять;
2) умение распространять полученные выводы на возможные практические ситуации, сходные с ситуацией, описанной в условии задачи;
3) умение оценивать практическую важность обеспечения точности расчетов в этих ситуациях.

В методическом плане обучения учащихся элементам математического моделирования нами в процессе исследования рассматривался как первый методически необходимый – этап введения их в методы использования элементов компьютерной техники и информационных технологий в курсе алгебры и начал анализа. Систематическое изложение методических рекомендаций по проведению такой работы подробно отражено в наших методических рекомендациях для учителей, которые участвовали в педагогических экспериментах. Поэтому в качестве примера рассмотрим только две типичные прикладные задачи, показывающие введение учащихся в методы математического моделирования исходных ситуаций. При изучении темы «Применение производной» ученикам предлагалась следующая задача:

Задача 1. Найдите, при каких размерах расход жести на изготовление консервной банки цилиндрической формы заданной емкости V будет наименьшим.
<u>1-этап решения</u>. Учитель спрашивает: «Что в данной задаче является существенным и от чего можно отвлечься, а также каких данных в этой задаче не хватает, чтобы наиболее точно ответить на поставленный вопрос?»
Ученики отвечают:

1. К существенным фактам в задаче относятся следующие:

а) банка имеет цилиндрическую форму;

б) задана емкость банки, т.е. её объём.

Учитель: Какие данные (которые могут повлиять на точность ответа на вопрос) не приведены?

Ответ: Толщина жести.

Учитель: Какие факторы в задаче не существенны?

Ответ: Сорт металла, из которого изготовлена банка. Это может быть не только жесть, но и алюминий, сталь и т.п., а также предназначение банки.

Учитель делает вывод: «В нашей задаче сорт металла известен – жесть, а из алюминия консервные банки не делают. Значит, мы получим решение, только с точностью до толщины того материала, из которого изготовлена банка».

<u>2-этап решения</u>. Учитель просит учащихся назвать геометрическую модель консервной банки.

Ответ учащихся: Это цилиндр.

Учитель спрашивает: Какая аналитическая модель в математике соответствует цилиндру?

Ответы: Это формула для вычисления его объёма $V=\Pi x^2 h$, где x-радиус основания, h – высота.

Ученикам дается задание: Зная радиус цилиндра x и его объём V, найти площадь его полной поверхности.

$S=2\Pi x^2+2\Pi xh$ и так как $h=\frac{V}{\Pi x^2}$, то $S=2\Pi x^2+2\Pi x\frac{V}{\Pi x^2}=2\Pi x^2+\frac{2V}{x}$

Учитель отмечает, что теперь, исходя из имеющейся аналитической модели задачи, следует выбрать ход решения.

Предложенный учениками правильный ход решения:

Нам удалось составить функцию S(x). Спрашивается, при каких значениях x функция S(x) будет иметь минимальное значение?

Ответ на этот вопрос дает знание свойств производной функции, которое выглядит так: $S'(x)=0$ в точке x_0, где S(x) имеет минимальное значение.

Так как переменная x может принимать лишь положительние значения, решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения S(x) на положительной полупрямой. Найдем производную $S'(x)$,

$S(x)=4\Pi x-\frac{2V}{x^2}=\frac{4\Pi x^3-2V}{x^2}$

Для нахождения критических точек решим уравнение $S'(x)=0$, т.е. уравнение

$\frac{4\Pi x^3-2V}{x^2}=0$ (1)

Корень уравнения $x_0=\sqrt[3]{\frac{V}{2\Pi}}$, При $0<x<\sqrt[3]{\frac{V}{2\Pi}}$, $S'(x)<0$ а при $x>\sqrt[3]{\frac{V}{2\Pi}}$,

$S'(x) > 0$. Следовательно, в точке $x_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\Pi}}$, $S(x)$ имеет минимум.

Так как уравнение (1) не имеет других кроме $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\Pi}}$, действительных корней, этот минимум совпадает с наименьшим значением функции на рассмотренном промежутке, при этом высота цилиндра $h=\dfrac{V}{2x^2}=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\Pi}}$

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра, имеющего объём V , будет наименьший при $h=2x=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\Pi}}$, т.е. когда цилиндр равносторонний.

<u>III этап решения</u>. На этом этапе ученики, в ряде случае в с помощью учителя, проводили следующую интерпретацию полученного решения. Наименьший расход жести на изготовление консервной банки цилиндрической формы заданной емкости будет достигнут при условии, что диаметр основания и высота банки равны между собой по размеру.

Проводились следующие рассуждения. При $h=2x_0=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\Pi}}$, площадь полной поверхности

$$S=2\Pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\Pi}} + 2V\sqrt[3]{\frac{2\Pi}{V}} = 3\sqrt[3]{2\Pi V^2}.$$

Для сравнения результатов возьмём другое значение радиуса и пусть $x_1=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\Pi}}$.

Учитывая, что объём цилиндра равен V , находим его высоту $h=\dfrac{V}{\Pi x^2} = \dfrac{V}{\Pi\sqrt[3]{(\frac{V}{4\Pi})^2}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{2V}{\Pi}}$. При этом площадь полной поверхности

$$S_1=2\Pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{16\Pi^2}} + 2V\sqrt[3]{\frac{4\Pi}{V}} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{4\Pi V^2}.$$

$S_1 > S$ так как $\dfrac{5}{2}\sqrt[3]{4} > 3\sqrt[3]{2}$

При необходимости последнее неравенство проверяется.

В этом случае расход жести увеличился более чем на 6% по сравнению с наименьшим. Учитель обращает внимание учеников на то, что ежегодно выпускается десятки миллионов консервов в жестяной упаковке. Если эти банки не представляют собой равносторонние цилиндры, то на их изготовление допускается перерасход жести. Экономия 1% жести на изготовление каждой такой банки позволит за счёт сэкономленного материала дополнительно изготовить миллионы новых банок.

Наряду с этим учитель разъяснял учащимся, что промышленность нередко выпускает консервы в жестяной таре и другой формы, не обеспечивая наименьший расход материала на изготовление банок. Это обусловлено рядом причин: стремлением к минимизации отходов при изготовлении банок, соображениями торговой эстетики, возможностями транспортировки и другими.

Методика обучения математики в школе должна включать в себя организацию следующих этапов учебной - творческой деятельности: поиск, анализ и выбор учащимся проблемных прикладных ситуаций практического характера – обучение математическому моделированию и моделирование характерных для проблемных ситуаций процессов и явлений с использованием доступного для учащихся математического аппарата, самостоятельное формулирование учебно – творческих математических задач на основе построенных моделей, решение учебных проблемных задач.

References:

1. *Blekhman II, Myshkis AD, Panovka YaG. Mechanics and applied mathematics: logic and features of applications of mathematics. Moscow, 1990; 360.*
2. *Melnikov YuB. Mathematical modeling: structure, algebra, model training in the construction of mathematical models: monograph. Yekaterinburg, 2004; 384.*
3. *Moiseev NN. Math puts an experiment. Moscow, 1979; 224.*
4. *Kholodnaya MA. Psychology of the intellect: paradoxes research. Tomsk, 1997; 391.*
5. *Eshpulatov NO. Polytechnic principle in the process of teaching mathematics in secondary schools (methodical recommendations). Moscow, 1991; 46.*