

*Vladimir A. Vershinin,  
ScD, assistant professor,  
Rybinsk state aviation technical  
university n.a. PA. Solovyov*

## The Transmission of Binary Messages Special Biorthogonal Signals

**Key words:** *biorthogonal signals, opposite orthogonal signals, frequency band, noise immunity.*

**Annotation:** *The article is devoted to the efficiency of transmission of binary messages using special biorthogonal signals. Determined frequency band occupied by the transmitted signal. Evaluating noise immunity of transmission when exposed to noise in the form of a normal white noise.*

### 1. Введение

Под двоичным сообщением будем понимать последовательность элементов, каждый из которых имеет длительность  $T$  и может принимать с равной вероятностью два значения 0 или 1. Перед передачей двоичное сообщение делится на блоки, каждый из которых состоит из  $L$  элементов. Таким образом, блок элементов двоичного сообщения имеет длительность  $T_s = LT$ . Сигнал на выходе модулятора на интервале передачи блока от  $-T_s/2$  до  $T_s/2$

$$s(t) = \sum_{i=0}^{L-1} d_i v_i(t), \quad (1)$$

где  $\{v_i(t)\}$  – множество ортогональных сигналов;  $d_i$  принимает значение 1 или  $-1$  в зависимости от значения 1 или 0  $i$ -го элемента блока.

Для ортогональных сигналов  $\int_{-T_s/2}^{T_s/2} v_i(t)v_j(t)dt = 0$  при  $i \neq j$ ,  $\int_{-T_s/2}^{T_s/2} v_i^2(t)dt = W$ ,  $W$  –

энергия сигнала. Сигналы  $v_i(t)$  и  $-v_i(t)$  называют противоположными, а множество ортогональных и соответствующих противоположных сигналов – биортогональными сигналами.

В статье рассматривается множество ортогональных сигналов, которое получается из множества линейно независимых сигналов следующего вида

$$a_i(t) = A \left[ \cos 2\pi \left( K + \frac{i}{2} \right) \frac{t}{T_s} + \cos 2\pi \left( K + \frac{i}{2} + 1 \right) \frac{t}{T_s} \right] \text{ для четных } i = 0, 2, 4, \dots,$$

$$a_i(t) = A \left[ \sin 2\pi \left( K + \frac{i-1}{2} \right) \frac{t}{T_s} + \sin 2\pi \left( K + \frac{i+1}{2} \right) \frac{t}{T_s} \right] \text{ для нечетных } i = 1, 3, 5, \dots$$

Первые восемь таких сигналов:

$$a_0(t) = A [\cos 2\pi K t / T_s + \cos 2\pi (K + 1) t / T_s],$$

$$a_1(t) = A [\sin 2\pi K t / T_s + \sin 2\pi (K + 1) t / T_s],$$

$$a_2(t) = A [\cos 2\pi (K + 1) t / T_s + \cos 2\pi (K + 2) t / T_s],$$

$$a_3(t) = A [\sin 2\pi (K + 1) t / T_s + \sin 2\pi (K + 2) t / T_s],$$

$$a_4(t) = A [\cos 2\pi (K + 2) t / T_s + \cos 2\pi (K + 3) t / T_s],$$

$$a_5(t) = A [\sin 2\pi (K + 2) t / T_s + \sin 2\pi (K + 3) t / T_s],$$

$$a_6(t) = A [\cos 2\pi (K + 3) t / T_s + \cos 2\pi (K + 4) t / T_s],$$

$$a_7(t) = A [\sin 2\pi (K + 3) t / T_s + \sin 2\pi (K + 4) t / T_s].$$

Здесь  $A$  – амплитуда синусоидальных и косинусоидальных составляющих;  $K$  – целое положительное число, определяющее положение полосы частот, занимаемой сигналом  $s(t)$ .

Используя процедуру Грама – Шмидта, получим сначала ненормированные ортогональные сигналы:

$$b_i(t) = a_i(t) - \frac{i}{i+2} b_{i-2} \text{ для четных } i,$$

$$b_i(t) = a_i(t) - \frac{i-1}{i+1} b_{i-2} \text{ для нечетных } i,$$

а затем нормированные ортогональные сигналы

$$v_i(t) = \frac{b_i(t)}{\sqrt{\int_{-T_s/2}^{T_s/2} b_i^2(t) dt}}.$$

Первые восемь сигналов  $v_i(t)$ :

$$v_0(t) = A [\cos 2\pi K t / T_s + \cos 2\pi (K + 1) t / T_s],$$

$$v_1(t) = A [\sin 2\pi K t / T_s + \sin 2\pi (K + 1) t / T_s],$$

$$v_2(t) = \frac{A}{\sqrt{3}} [\cos 2\pi (K + 1) t / T_s + 2 \cos 2\pi (K + 2) t / T_s - \cos 2\pi K t / T_s],$$

$$v_3(t) = \frac{A}{\sqrt{3}} [\sin 2\pi (K + 1) t / T_s + 2 \sin 2\pi (K + 2) t / T_s - \sin 2\pi K t / T_s],$$

$$v_4(t) = \frac{A}{\sqrt{6}} [\cos 2\pi (K + 2) t / T_s + 3 \cos 2\pi (K + 3) t / T_s - \cos 2\pi (K + 1) t / T_s + \cos 2\pi K t / T_s],$$

$$v_5(t) = \frac{A}{\sqrt{6}} [\sin 2\pi (K + 2) t / T_s + 3 \sin 2\pi (K + 3) t / T_s -$$

$$- \sin 2\pi(K + 1)t/T_s + \sin 2\pi Kt/T_s ],$$

$$v_6(t) = \frac{A}{\sqrt{10}} [\cos 2\pi(K + 3)t/T_s + 4\cos 2\pi(K + 4)t/T_s - \cos 2\pi(K + 2)t/T_s + \cos 2\pi(K + 1)t/T_s - \cos 2\pi Kt/T_s ],$$

$$v_7(t) = \frac{A}{\sqrt{10}} [\sin 2\pi(K + 3)t/T_s + 4\sin 2\pi(K + 4)t/T_s - \sin 2\pi(K + 2)t/T_s + \sin 2\pi(K + 1)t/T_s - \sin 2\pi Kt/T_s ].$$

Энергия этих сигналов  $W = A^2 T_s$ , энергия сигнала  $s(t)$  равна  $W_s = LW$ . На рис. 1 приведена возможная нормированная реализация сигнала  $s(t)$  при  $L = 8$  и  $K = 5$ .

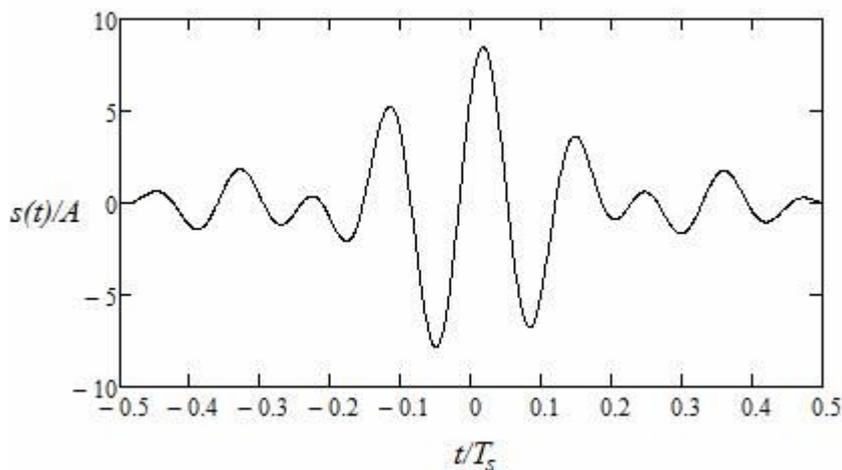


Рис. 1. Нормированная реализация сигнала  $s(t)$  при  $L = 8$  и  $K = 5$

В (1) и (2) рассматривалось использование неперекрывающихся и частично перекрывающихся во времени сигналов вида  $d_0 v_0(t)$ . Целью данной работы является исследование эффективности использования сигнала (1), который состоит из  $L$  полностью перекрывающихся во времени сигналов вида  $d_i v_i(t)$ .

## 2. Полоса частот, занимаемая сигналом

Сигнал  $s(t)$ , определяемый (1), в общем случае является случайным сигналом. Будем считать элементы двоичного сообщения независимыми случайными величинами, принимающими значения 0 или 1 с равной вероятностью. Определим полосу частот  $F$ , занимаемую сигналом, исходя из спектральной плотности мощности этого сигнала  $S(f)$ , где  $f$  – частота. При этом будем считать, что в полосе частот  $F$  должно быть сосредоточено 99% средней мощности сигнала  $P$ . Тогда

$$F = f_2 - f_1, \quad (2) \text{ где } f_1 \text{ и } f_2 -$$

нижняя и верхняя граничные частоты определяются из выражений:

$$\int_0^{f_1} S(f) df = 0.005P; \quad \int_{f_2}^{\infty} S(f) df = 0.005P; \quad P = \int_0^{\infty} S(f) df.$$

Спектральная плотность мощности может быть определена как (1):

$$S(f) = \frac{2}{T_s} \sum_{i=0}^{L-1} |V_i(f)|^2, \quad (3)$$

где  $V_i(f) = \int_{-T_s/2}^{T_s/2} v_i(t) e^{-j2\pi ft} dt$  – спектральная плотность сигнала  $v_i(t)$ .

С использованием (3) получены зависимости  $S(f)$  при  $K = 5$  для значений  $L = 2$ ,  $L = 4$  и  $L = 8$ . Указанные зависимости приведены на рис. 2, рис.3 и рис. 4 в нормированном виде.

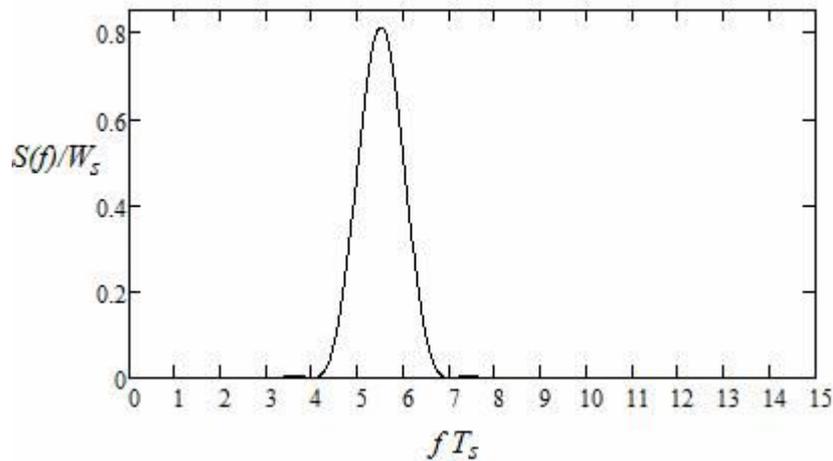


Рис. 2. Нормированная зависимость  $S(f)$  при  $L = 2$  и  $K = 5$

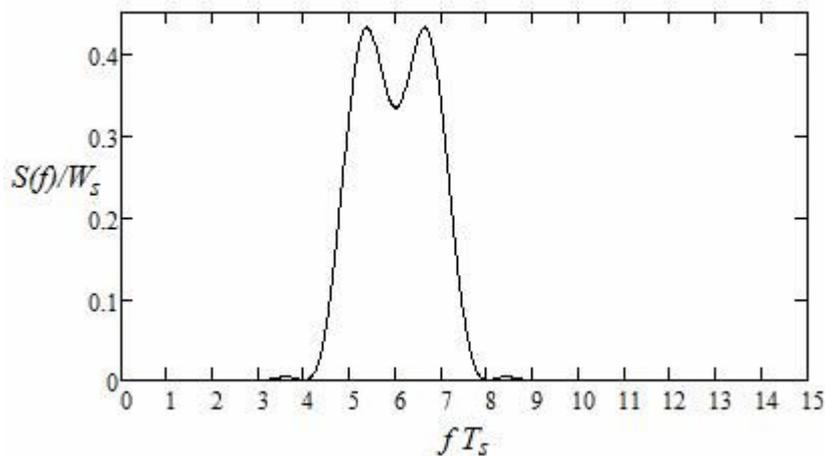


Рис. 3. Нормированная зависимость  $S(f)$  при  $L = 4$  и  $K = 5$

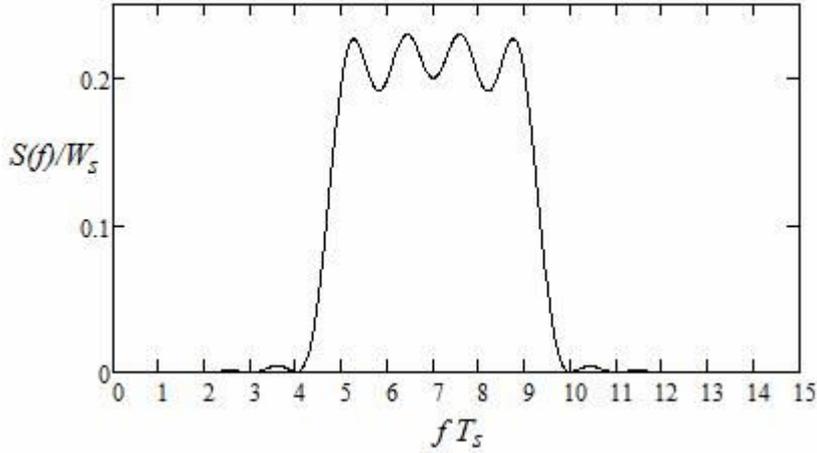


Рис. 4. Нормированная зависимость  $S(f)$  при  $L = 8$  и  $K = 5$

Полосу частот  $F$ , занимаемую сигналом  $s(t)$ , определим по формуле (2).

При  $K = 5$  для значений  $L = 2$ ,  $L = 4$  и  $L = 8$  эта полоса равна соответственно  $2.36/T_s$ ,  $3.36/T_s$ ,  $5.34/T_s$ . Частотная эффективность передачи информации, определяемая [3] как  $R/F$ , где  $R = L/T_s$  – скорость передачи информации (бит/с), равна соответственно 0.85, 1.19, 1.5. Заметим, что частотная эффективность практически не зависит от  $K$ .

Определим пик-фактор сигнала  $s(t)$  по формуле  $s_{\max}/\sqrt{P}$ , где  $s_{\max}$  и  $P$  – соответственно максимальное значение сигнала и его средняя мощность. Тогда при  $K = 5$  для значений  $L = 2$ ,  $L = 4$  и  $L = 8$  пик-фактор равен соответственно 2, 2.4 и 3.

### 3. Помехоустойчивость

Будем полагать, что на сигнал  $s(t)$ , определяемый (1), в линии связи воздействует аддитивная помеха  $n(t)$  в виде белого шума с односторонней спектральной плотностью мощности  $N$ . Тогда на входе демодулятора на интервале  $-T_s/2 \leq t < T_s/2$  имеет место сигнал

$$z(t) = s(t) + n(t). \quad (5)$$

Демодулятор осуществляет обработку этого сигнала по следующему алгоритму.

Сначала определяются значения  $d_i' = \int_{-T_c/2}^{T_c/2} z(t)v_i(t)dt$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, L-1$ . Затем по

значению  $d_i'$  принимается решение о приеме  $i$ -го элемента блока: если  $d_i' \geq 0$ , то  $i$ -й элемент блока равен 1; если  $d_i' < 0$ , то  $i$ -й элемент блока равен 0. При отсутствии помехи  $d_i' = d_i$ , благодаря ортогональности сигналов  $v_i(t)$ . При наличии помехи возможно возникновение ошибки, если  $d_i' \neq d_i$ . Отметим, что описанный алгоритм

обеспечивает минимальную вероятность ошибки (3):  $p = 1 - F(\sqrt{2}h)$ , где  $h^2 = W/N$ ;

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy.$$

#### 4. Выводы

С увеличением  $L$  возрастает частотная эффективность передачи информации, стремясь к пределу Найквиста, но при этом увеличивается пик-фактор сигнала на выходе модулятора.

Использование предлагаемых биортогональных сигналов при  $L = 2$  может быть альтернативой квадратурной амплитудной модуляции. Преимуществом в данном случае является отсутствие фильтров, уменьшающих полосу частот передаваемого сигнала.

Использование предлагаемых биортогональных сигналов при  $L = 2$  позволяет получить ту же частотную эффективность и помехоустойчивость, что и использование частично перекрывающихся во времени сигналов, описанных в (2). По сравнению с частично перекрывающимися сигналами происходит увеличение пик-фактора выходного сигнала модулятора в  $\sqrt{2}$  раз. С другой стороны, увеличение пик-фактора может существенно упростить процесс синхронизации при демодуляции.

#### Reference:

1. Vershinin VA. *The transmission of binary messages simplex signals: Journal of radio electronics: Electronic journal*, 2013, N 11. [Internet] Available from: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/5/text.pdf>
2. Vershinin VA. *The transmission of binary messages special overlapping signals: Eastern European Scientific Journal (Germany): Auris Verlag*, 2014, 3; 219-227. [Internet] Available from: <http://journale.auris-verlag.de/index.php/EESJ/article/view/153/151>
3. *Theory of telecommunications: a Textbook for institutes: Ed. AG. Zuko, DD. Klovsky, VI. Korzhik, MV. Nazarov. Moscow, Radio and communication, 1998; 432.*