DOI 10.12851/EESJ201508C05ART03

***Andrew L. Gusev**,*
ScD, professor,
Perm State University Scientific Research

Controlling and Continuous Statistical Control with Memory

Key words: *plan for monitoring, control stopping rule, the recurrent events.*

Annotation: *controlling when the sanitary-chemical and microbiological tests of water are considered various plans for continuous statistical control. For any stopping rule control as an essential component of the control plan, the type "of the last two samples n_1 samples or third grade of the last n_2 trial two samples of the third class, and at least n_3 samples second class" ($n_1 \geq 2$, $n_2 > n_1$, $n_2 - 1 > n_3$), if monitored with memory , found the expected number of samples inspected before stopping control.*

При осуществлении контроллинга, например, санитарно-химических или микробиологических проб воды (1), для принятия управленческого решения требуется план контроля (2, 3), гарантирующий удовлетворительное качество воды. Такой план контроля может быть выбран исходя из задач контроллинга и учета некоторых параметров контроля. К таким параметрам контроля, несомненно, относятся: периодичность замера пробы (час, несколько часов, сутки, неделя, месяц и т.д.), качество анализа пробы (зашумленность статистических данных о качестве пробы) и местоположение забора пробы (центральный водовод, периферийный водовод, водоем первой категории, водоем второй категории и т.д.).

Однако при любом выбранном плане контроля важнейшей составляющей этого плана являются правила остановки контроля для принятия управленческого решения (4).

Пусть по уровню качества каждая проба независимо от других проб с вероятностью p_i (i = 1, 2, 3) относится к i-ому классу, $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$. Первый класс пробы обозначает, что проба безопасная для здоровья. Второй класс пробы обозначает, что проба удовлетворительная (значительно не превышающая предельно допустимые концентрации вредных для здоровья веществ). И третий класс пробы обозначает, что проба критическая (небезопасная для здоровья).

Рассмотрим следующее семейство планов. Контроль осуществляется до тех пор, пока не будет обнаружены две пробы третьего класса, после чего принимается решение об остановке контроля (о принятии мер об устранении вредных веществ или их нейтрализации) по двум условиям. А именно, если число проб между двумя пробами третьего класса (включая эти пробы) меньше или равно n_1, то наступает остановка контроля (слишком часто встречаются пробы третьего класса). Кроме того, если число проб между двумя пробами третьего класса (включая эти пробы) больше n_1, но меньше или равно n_2 и при этом число проб второго класса между пробами третьего класса больше или равно n_3, то также наступает остановка контроля (слишком мал удельный вес проб первого класса). Далее принимается управленческое решение. Обычно такие решения принимаются по следующему критерию. Если фактическое число проконтролированных проб до остановки контроля оказалось больше или равно математического ожидания числа проконтролированных проб до остановки контроля, то без принятия каких либо управленческих мер продолжается статистический контроль (произошло то, что и должно было произойти по теории, т.е. общее качество воды не ухудшилось). В противном случае необходимо принятие управленческих мер для улучшения качества воды и только после этого статистический контроль может быть продолжен. Остановка контроля, таким образом, происходит по выше сформулированному правилу: «из последних n_1 проб две пробы третьего класса или из последних n_2 проб две пробы третьего класса и не меньше n_3 проб второго класса».

В работе (5) была доказана теорема, согласно которой математическое ожидание числа проконтролированных проб при классическом контроле (после остановки контроля – контроль начинается с нуля, то есть игнорируется вся предыдущая история контроля) до наступления события E_{n_1,n_2,n_3} равно:

$$\mu(E_{n_1,n_2,n_3}) = \frac{1+p_3^{-1}V_1(p)}{V_1(p)}, \qquad (1)$$

где $V_1(p) = p_3^2\left[\sum_{i=0}^{n_1-2}(1-p_3)^i + \sum_{j=n_1-1}^{n_2-2}\sum_{i=n_3}^{j} p_1^{j-i}p_2^i C_j^i\right]$, $p=(p_1,p_2,p_3)$, E_{n_1,n_2,n_3} - событие, состоящее в том, что «из последних n_1 проб две пробы третьего класса или из последних n_2 проб две пробы третьего класса и не менее n_3 проб второго класса» при классическом контроле ($n_1 \ge 2$, $n_2 > n_1$, $n_2 - 1 > n_3$).

На практике оказалось, что предыдущую историю контроля проб воды при остановке контроля желательно учитывать, то есть применять те же параметры контроля (планы контроля), но с памятью (6,7). Напомним, что при контроле с памятью формально считается, что до начала контроля была проба, принадлежащая третьему классу.

Введем обозначение $E^{П}_{n_1,n_2,n_3}$ - событие, состоящее в том, что «из последних n_1 проб две пробы третьего класса или из последних n_2 проб две пробы третьего класса и не менее n_3 проб второго класса» при непрерывном статистическом контроле с памятью. Аналогично (8) можно показать, что это событие является рекуррентным, следовательно, для этого события математическое ожидание числа проконтролированных проб до наступления события $E^{П}_{n_1,n_2,n_3}$ равно:

$$\mu(E^{П}_{n_1,n_2,n_3}) = \frac{\sum_{i=0}^{n_1+n_2-1} c_i}{P(E^{П}_{n_1,n_2,n_3})}, \qquad (2)$$

где c_i - вероятности перехода за i шагов контроля из состояний, соответствующих наступлению события $E^{П}_{n_1,n_2,n_3}$, в эти же состояния, $c_0 = 1$ по определению, $(n_1 + n_2)$ - максимальная длина состояния, соответствующего наступлению события $E^{П}_{n_1,n_2,n_3}$, $P(E^{П}_{n_1,n_2,n_3})$ - вероятность наступления события $E^{П}_{n_1,n_2,n_3}$, состояние – определенная (фиксированная) последовательность проб.

Перечислим все состояния, отвечающие наступлению события $E^{П}_{n_1,n_2,n_3}$. В дальнейшем будем использовать следующее цифровое обозначение: «1» – проба первого класса, «2» – проба второго класса и «3» – проба третьего класса. Это такие состояния:

$$\langle 3 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \ldots, \langle \underbrace{2,\ldots,2}_{n_1-2},3 \rangle, \ldots, \langle \underbrace{1,\ldots,1}_{n_1-2},3 \rangle,$$

$$\langle \overbrace{\underbrace{2,\ldots,2}_{n_3},1,\ldots,1}^{n_1-1},3 \rangle, \ldots, \langle \overbrace{1,\ldots1,\underbrace{2,\ldots,2}_{n_3}}^{n_1-1},3 \rangle,$$

$$\langle \overbrace{\underbrace{2,\ldots2}_{n_3},1,\ldots,1}^{n_1},3 \rangle, \ldots, \langle \overbrace{1,\ldots,1,\underbrace{2,\ldots,2}_{n_3}}^{n_1},3 \rangle, \ldots,$$

$$\langle \underbrace{2,\ldots,2}_{n_3},\underbrace{1,\ldots,1}_{n_2-n_3-2},3 \rangle, \ldots, \langle \underbrace{1,\ldots,1}_{n_2-n_3-2},\underbrace{2,\ldots,2}_{n_3},3 \rangle, \ldots, \langle \underbrace{2,\ldots,2}_{n_2-2},3 \rangle,$$

$$\langle \underbrace{2,\ldots,2}_{n_1},3,3 \rangle, \ldots, \langle \underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},3,3 \rangle, \langle \underbrace{2,\ldots,2}_{n_1},3,2,3 \rangle, \ldots, \langle \underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},3,1,3 \rangle, \ldots,$$

$$\langle \underbrace{2,\ldots2}_{n_1},3,\underbrace{2,\ldots,2}_{n_1-2},3 \rangle, \ldots, \langle \underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},3,\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1-2},3 \rangle, \ldots,$$

$$\langle \underbrace{2,\ldots,2}_{n_1},3,\overbrace{\underbrace{2,\ldots,2}_{n_3},1,\ldots,1}^{n_1=1},3 \rangle, \ldots, \langle \underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},3,\overbrace{1,\ldots,1,\underbrace{2,\ldots,2}_{n_3}}^{n_1-1},3 \rangle, \ldots,$$

$$\langle \underbrace{2,\ldots,2}_{n_1},3,\overbrace{1,\ldots,1,\underbrace{2,\ldots,2}_{n_3}}^{n_2-2},3 \rangle, \ldots, \langle \underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},3,\overbrace{\underbrace{2,\ldots,2}_{n_3},1,\ldots,1}^{n_2-2},3 \rangle, \ldots,$$

$$\left\langle \underbrace{2,\ldots,2}_{n_1},3,\overbrace{2,\ldots,2}^{n_2-2},3 \right\rangle,\ldots,\left\langle \underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},3,\overbrace{2,\ldots,2}^{n_2-2},3 \right\rangle.$$

Тогда вероятность наступления события $E^{П}_{n_1,n_2,n_3}$ равна:

$$\mu(E^{П}_{n_1,n_2,n_3}) = \left[1 + p_3(1-p_3)^{n_1}\right]p_3\left[\sum_{i=0}^{n_1-2}(1-p_3)^i + \sum_{j=n_1-1}^{n_2-2}\sum_{i=n_3}^{j} p_1^{j-i}p_2^i C_j^i\right]. \quad (3)$$

Далее сумма вероятностей перехода за i шагов контроля $(i=\overline{0,n_1+n_2-1})$ из состояний, соответствующих наступлению события $E^{П}_{n_1,n_2,n_3}$, в эти же состояния, равна:

$$\sum_{i=0}^{n_1+n_2-1} c_i = 1 + \left[1 + p_3(1-p_3)^{n_1}\right]p_3\left[\sum_{i=0}^{n_1-2}(1-p_3)^i + \sum_{j=n_1-1}^{n_2-3}\sum_{i=n_3}^{j} p_1^{j-i}p_2^i C_j^i\right].$$

(4)

Следовательно, подставляя (3) и (4) в формулу (2), получаем

$$\mu(E^{П}_{n_1,n_2,n_3}) = \frac{1+[1+p_3(1-p_3)^{n_1}]p_3[\sum_{i=0}^{n_1-2}(1-p_3)^i + \sum_{j=n_1-1}^{n_2-3}\sum_{i=n_3}^{j} C_j^i p_1^{j-i}p_2^i]}{[1+p_3(1-p_3)^{n_1}]p_3[\sum_{i=0}^{n_1-2}(1-p_3)^i + \sum_{j=n_1-1}^{n_2-2}\sum_{i=n_3}^{j} C_j^i p_1^{j-i}p_2^i]}. \quad (5)$$

Фактически была доказана следующая теорема.

Теорема. Математическое ожидание числа проконтролированных проб до наступления события $E^{П}_{n_1,n_2,n_3}$ при контроле с памятью вычисляется по формуле (5), где p_i (i = 1, 2, 3) – вероятность принадлежности пробы к i-ому классу, $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, $n_1 \geq 2$, $n_2 > n_1$, $n_2 - 1 > n_3$.

Легко можно показать, что при равных значениях параметров в формулах (1) и (5): $\mu(E^{П}_{n_1,n_2,n_3}) \leq \mu(E^{П}_{n_1,n_2,n_3})$. Это, по сути, означает, что планы контроля с памятью быстрее реагируют на ухудшение качества воды, чем классические планы контроля.

References:

1. *Zaitseva NV, Gusev AL, Shur PZ. Perfection of methodical approaches to planning activities of bodies and organizations of Rospotrebnadzor in regional departmental programs: Public health and environment, 2010, №1 (214); 4-7.*
2. *Dodge HF. A sampling inspection plan for continuous production: Annals of Mathematical Statistics, 1943, № 14; 264-279.*

3. *Belyaev JK. Probability sampling methods. Moscow, Nauka, 1975; 408.*
4. *Gusev AL. Probabilistic characteristics of one stopping rule for steady control: Journal of Mathematical Sciences, 1995, vol. 75; 1435-1436.*
5. *Gusev AL. Recurrent events and characteristics of plans of continuous control: Journal of Mathematical Sciences, 1995, vol. 75; 1571-1575.*
6. *Gusev AL. Plans for the continuous monitoring of memory: Statistical methods of estimation and hypothesis testing, 2010, №22; 143-147.*
7. *Gusev AL. Continuous Inspection with Memory: Statistics & Probability Letters, 2012, vol. 82; 303-307.*
8. *Gusev AL. Continuous statistical control of the management. Los Angeles (USA): Createspace, 2012; 128.*