**DOI 10.12851/EESJ201503C05ART07**

***Natalia A. Sayfutdinova,***
*ScD, docent,*
*Rostov State University*
*Of Civil Engineering*

# The Model of Economic Development and Its Testing on Statistical Data

***Key words:*** *Solow equation, distribution of investment, science funding, elasticity coefficient by a factor of capital.*

***Annotation:*** *Recently, a very important and promising is the research area, to study the conditions of the best use of the funds invested in high-tech industries. It is obvious that the development of such technology is costly. What to invest: in the research or the development of production? The article discusses endogenous growth model in which the volume of investment in research is reflected in the value of the coefficient of elasticity of the factor capital. The results of testing this model in various statistics.*

## Введение

В последнее время очень важным и перспективным является научное направление, изучающее условия наилучшего использования средств, инвестируемых в высокотехнологичные производства. Совершенно очевидно, что развитие таких технологий сопряжено с большими затратами. Во что выгодно вложить: в научные исследования или в развитие производства? Существует огромное количество разнообразных подходов к решению поставленных вопросов, все эти подходы тесно связаны с моделированием научно-технического прогресса.

Родоначальником этого подхода принято считать М. Брауна с его монографией «Теория и измерение технического прогресса» (1). В этой работе собраны основные подходы к моделированию научно-технического прогресса, основанные на применении так называемых производственных функций. Основными представителями этого класса являются функция Кобба-Дугласа и функция типа ПЭЗ, параметры которых могут быть вычислены для различных экономик (в (1) параметры этих функций вычисляются для различных периодов экономического развития США). С времён написания упомянутого издания данный подход получил значительное развитие как в работах западных учёных (П.Ромера, Д.Лукаса, Узавы (3, 4, 5) и др.), так и в работах отечественных исследователей (Ашманова С.А., Петрова А.А., Поспелова И.Г., Шананина А.В., Трифонова А.Г. и др.). Отличие касается подхода к моделированию НТП и различным критериям оптимальности в предлагаемых моделях.

Нас будет интересовать подход, который основан на учёте НТП в виде коэффициента эластичности по фактору капитал. Этот коэффициент в различных производственных функциях отражается в различных параметрах. В работе используется функция Кобба-Дугласа, где этот коэффициент является показателем множителя, который обычно связывают с объёмом используемых основных фондов или объёмом капитала. Кроме того, рассматриваемый подход основан на известной динамической модели Рамсея-Солоу, что является стандартом в современном моделировании экономического развития.

**Модель экономического развития**

В данной работе рассматривается подход, предложенный в (2). Напомним его основные положения. Будем предполагать, что вложения в создание новых технологий являются вложениями с высоким КПД и приводят к появлению новых наукоёмких технологий, это означает увеличение влияния капитала на процесс производства, что отражается в росте коэффициента эластичности по фактору капитал. Будем рассматривать производственную функцию $F = AK^{\alpha} L^{\beta}$, где $\alpha$ - коэффициент эластичности по фактору капитал, $\beta$ - коэффициент эластичности по фактору труд. Будем считать, что $\alpha + \beta = 1$. Будем рассматривать процесс распределения инвестиций в некотором регионе, некоторой отрасли или большом производственном объединении. Пусть существование этого экономического агента своим продуктом имеет, например, валовый продукт, и, будем считать, что объём последнего зависит от освоения и применения некоторой технологии. Эта технология связана с результатом освоения средств, вложенных в научные исследования. Будем рассматривать такую модель, в которой общий объём инвестиций изначально выделялся для развития производственной части рассматриваемого процесса. Далее будем рассматривать последовательность долей выпуска $s_i$, которые инвестируются в НИС на временных промежутках $[t_i, t_{i+1}]$, причём эти доли – это части средств, которые ранее инвестировались в основные фонды, $i = 0,1,\ldots,n-1$. Вложенные в научные исследования средства приводят к созданию новых наукоёмких технологий. Такое качество полученных технологий отражается на структуре основного капитала, изменение которого описывается с помощью уравнения Рамсея-Солоу:

$$\frac{dK}{dt} = s_i\, AK^{\alpha_i} L^{1-\alpha_i} - \mu K$$

Будем считать, что на каждом из рассматриваемых промежутков производственный процесс осуществляется уже с новым уровнем влияния инвестиций на результат производства, то есть, будем считать, что $\alpha_i = \alpha_K(s_i F_i)$ - возрастающая функция. Необходимо отметить, что в результате решения полученного дифференциального уравнения на каждом из рассматриваемых временных интервалов получаем величину $K_i = K(t_i)$, которая и определяет начальный уровень капитала для последующего временного интервала. Рассматривая последовательность таких промежутков, можно поставить задачу оптимального управления, в которой критерием оптимальности выступает величина $K_n = K(t_n)$. Опишем поставленную задачу более подробно:

$$
\begin{cases}
K(t_0)=K_0 \ -\textit{начальное условие} \\
\textit{для решения задачи Коши на отрезке} \, [t_0, t_1] \\
\alpha_i = \alpha_K(s_i F_i), L_i = L(t_i), F_i = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} \; i = 0,..,n-1, \\
K(t_i) = K_i, i = 1,..,n - \textit{из решения} \\
\textit{соответствующей задачи Коши}: \\
\dfrac{dK}{dt} = (\tilde{s} - s_{i-1}) A_{i-1} K^{\alpha_{i-1}}(t) \, L_{i-1}^{1-\alpha_{i-1}} - \mu K(t), \, t \in [t_{i-1}, t_i], \, i = 1, \dots, n \\
s^* < s^{**}, \, s^*, s^{**} \in (0;1) \\
\max\limits_{(s_i)_{i=0}^{n-1} : s^* < s_i < s^{**}} K_n - ?
\end{cases} \qquad (1)
$$

где $\tilde{s}$ - инвестиции в основные фонды, из которых некоторая часть $s_i$ инвестируется в научные изыскания, при этом $s^*, s^{**}$- ‘это естественные ограничения на выделяемые средства. Для решения этой задачи необходимы следующие исходные данные: $\mu$ - коэффициент амортизации, $L_i$ - объём трудовых ресурсов, постоянный на соответствующем временном интервале, $K_0$ - исходный объём инвестиций.

В работе описывается методика решения поставленной задачи с помощью численных методов покоординатного и градиентного спуска, метода случайного поиска, а так же описан программный комплекс, реализующий рассмотренные алгоритмы.

**Апробация модели на советской экономике**

Остановимся подробнее на результатах апробации данной модели.

Приведём результаты работы программного комплекса по данным по экономике СССР за 1961-1985 гг.

Исходные данные: $K_i$, $i$=0,…,$n$-1 – объём капитала за каждый год (в млрд. руб.), $L_i$, $i$=0,…,$n$-1 – объем труда (вычислен через среднюю зарплату в млрд. руб.), $F_i$, $i$=0,…,$n$-1 – валовой общественный продукт (в млрд. руб.), $V_i$, $i$=0,…,$n$-1 – расходы на науку в результате государственных вложений и частных инвестиций (в млрд. руб.), $n$=25; $\mu = 0.05$; $s^* = 0.015$; $s^{**} = \tilde{s} = 0.165$. Программный комплекс позволяет получить аппроксимирующие функции:

$$\alpha_i = \frac{0.6 \cdot V_i + 0.615}{V_i + 6.95};$$

$$L(t) = 61 + 5t + 0.18t^2 - 0.0015t^3;$$

$$A(t) = 2.99 - 0.0363t.$$

В таблице 1 приведены результаты работы метода градиентного спуска.

| Годы | $s_i$, i=0,n-1, (стат. данные) | Объём капитала (в млрд. руб.), (стат. данные) | $s_i$, i=0,…,n-1, результат метода градиентного спуска | Объём капитала (в млрд. руб.), результат метода градиентного спуска |
|---|---|---|---|---|
| 1961 | 0,015 | 442 | 0,0373 | 475 |
| 1962 | 0,015 | 477 | 0,0348 | 513 |
| 1963 | 0,015 | 515 | 0,0337 | 555 |
| 1964 | 0,015 | 557 | 0,0329 | 602 |
| 1965 | 0,015 | 601 | 0,0323 | 652 |
| 1966 | 0,015 | 649 | 0,0315 | 706 |
| 1967 | 0,015 | 700 | 0,0309 | 764 |
| 1968 | 0,015 | 757 | 0,0303 | 827 |
| 1969 | 0,015 | 814 | 0,0297 | 894 |
| 1970 | 0,015 | 860 | 0,0290 | 966 |
| 1971 | 0,015 | 914 | 0,0254 | 1043 |
| 1972 | 0,015 | 972 | 0,0280 | 1124 |
| 1973 | 0,015 | 1082 | 0,0275 | 1210 |
| 1974 | 0,015 | 1150 | 0,0270 | 1301 |
| 1975 | 0,015 | 1256 | 0,0266 | 1396 |
| 1976 | 0,015 | 1345 | 0,0262 | 1496 |
| 1977 | 0,015 | 1437 | 0,0257 | 1600 |
| 1978 | 0,015 | 1537 | 0,0254 | 1709 |
| 1979 | 0,015 | 1638 | 0,0250 | 1822 |
| 1980 | 0,015 | 1742 | 0,0246 | 1939 |
| 1981 | 0,015 | 1851 | 0,0243 | 2060 |
| 1982 | 0,015 | 1968 | 0,0240 | 2184 |
| 1983 | 0,015 | 2092 | 0,0237 | 2312 |
| 1984 | 0,015 | 2234 | 0,0232 | 2443 |
| 1985 | 0,015 | 2333 | 0,0213 | 2619 |

Таблица 1. Объём капитала в зависимости от инвестиций в науку.

Подведём итоги: применяя предложенную схему финансирования науки, т.е. выделяя указанные доли валового продукта можно получить объём капитала равный 2619 млрд.

руб. что на 12,25% превышает объём капитала на конец рассматриваемого периода, который составил 2333 млрд. руб.

**Апробация модели по данным по Ростовской области**

В данном разделе приведём результат апробации построенной модели на основе данных по Ростовской области в период с 1995 по 2007 годы. Выбор временного периода связан с тем, что в 2008 года происходит временный спад итогового валового продукта, что не даёт возможности к применению рассматриваемых выше походов. Таблица 2 иллюстрирует основные экономические показатели данного региона Российской Федерации.

| Год | Объём капитала, в тыс. руб. | Число занятых в экономике | Объём валового продукта | Средняя зарплата, в руб. | Расходы на науку, в тыс. руб. | Инвестиции в капитал, в тыс. руб. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1995 | 122130 | 1904 | 26339 | 329 | 317 | 5017 |
| 1996 | 286684 | 1860 | 31351 | 514 | 460 | 5666 |
| 1997 | 276615 | 1856 | 35574 | 589 | 528 | 5828 |
| 1998 | 296552 | 1752 | 40266 | 646 | 523 | 6822 |
| 1999 | 285331 | 1812 | 68504 | 932 | 1148 | 11135 |
| 2000 | 326991 | 1837 | 94301 | 1361 | 1588 | 15888 |
| 2001 | 400418 | 1880 | 126081 | 2092 | 1403 | 28876 |
| 2002 | 477972 | 1895 | 140773 | 3002 | 1894 | 29049 |
| 2003 | 600908 | 1882 | 171849 | 3806 | 2627 | 39375 |
| 2004 | 649308 | 1895 | 221167 | 4797 | 3434 | 52124 |
| 2005 | 746866 | 1899 | 263052 | 5945 | 4957 | 60145 |
| 2006 | 830392 | 1904 | 336010 | 7569 | 5177 | 95629 |
| 2007 | 1007353 | 1915 | 400000 | 9780 | 7006 | 126259 |

Таблица 2. Статистические данные по Ростовской области с 1995 по 2007г.

Остановимся подробнее на апробации рассмотренной модели на данных по указанному региону. Рассмотрим основные функции:

$$F = AK^{\alpha(V)} L^{\beta(V)},\ \beta(V) = 1 - \alpha(V),\ 0 < \alpha(V) < 1,\ 0 < \beta(V) < 1. \qquad (2)$$

Так как коэффициент $\alpha$ - монотонно возрастающая функция от объёма инвестиций в науку *V*. Опишем данную функцию следующей дробно-рациональной функцией:

$$\alpha(V) = \frac{bV + c}{V + d}, \qquad (3)$$

где *A*, *b*, *c*, *d* - некоторые постоянные. Определим эти постоянные из условия близости левой и правой частей в равенстве (3) на данном временном промежутке. Для нахождения этих четырех постоянных составим следующую функцию:

$$\Omega(A,b,c,d) = \sum_{m=1}^{13}\left[F_m - AK_m^{\alpha(V_m)} L_m^{\beta(V_m)}\right]^2 \qquad (4)$$

Для минимизации этой функции используем метод глобального случайного поиска. Для оценки точности построенной модели вычислим следующий коэффициент:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{m=1}^{13}\left(AK_m^{\alpha_m} L_m^{\beta_m} - F_m\right)^2}{\sum_{m=1}^{13}\left(F_m - \overline{F}\right)^2}, \quad \overline{F} = \frac{\sum_{m=1}^{13} F_m}{13}, \qquad (5)$$

Это число характеризует степень достоверности полученных результатов: чем ближе $R^2$ к 1, тем выше достоверность модели.

По статистическим данным, представленным в Таблице 2, получены:

$A = 0{,}06026,\ b = 0{,}4459,\ c = 0{,}08110,\ d = 2.493,\ R^2 = 0.9927$.

Оценивая величину коэффициента $R^2$ получаем, что данная формула (3) для коэффициента эластичности по капиталу даёт очень высокую точность. В таблице 3 приведены значения коэффициента $\alpha$ .

| Год | Величина коэффициента эластичности по фактору капитал |
|---|---|
| 1995 | 0.3268563 |
| 1996 | 0.3275271 |
| 1997 | 0.3278434 |
| 1998 | 0.3278202 |
| 1999 | 0.3306513 |
| 2000 | 0.3325644 |
| 2001 | 0.3317678 |
| 2002 | 0.3338579 |
| 2003 | 0.3368394 |
| 2004 | 0.3399437 |
| 2005 | 0.3453456 |
| 2006 | 0.3460807 |
| 2007 | 0.3518001 |

Таблица 3. Коэффициента эластичности по фактору капитал.

Из таблицы видно, что отличие коэффициента эластичности по фактору капитал на указанном промежутке незначительно (во второй значащей цифре). Поэтому применение указанной модели не даёт значительного изменения объёма капитала по сравнению со статистическими данными. Это происходит в связи с тем, что Ростовская область является аграрным регионом и влияние наукоёмких технологий на валовый продукт региона невелико.

***References:***


1. *Brown M. Theory and measurement of technological progress: Statistics, Moscow, 1971.*
2. *Sayfutdinova NA. Optimal control in a model of endogenous growth of closed economic systems: Journal DSTU, 2008, T. 3, N 4 (39); 366-375.*
3. *Lucas RE. On one mechanics of economic development: J. Monetary Econ. 1988, V. 22, N 7.*
4. *Romer P M. Endogenous technical change: J. Polit. Econ. 1990, V. 98, N 5.*
5. *Uzawa H. Optimal technical change in an aggregative model of economic growth: Int. Econ. Rev. 1965, V. 6, N 1.*