DOI 10.12851/EESJ201503C05ART05

Alexander T.Shlyakhov*,*
ScD, associate professor;

Alfiya G. Shlyakhova*,*
ScD, an associate professo;

Tamara P. Makarova*,*
PhD, associate professor;

Alina V. Varlamova*,*
student of group 30-61,
Almetyevsk State Oil Institute

Physical and Mathematical Interpretation of the Equations in Full Differentials

Key words: *the equation in full differentials, the field potentiality condition, physical and mathematical approach, the potential of the field, work.*

Annotation*: This article describes the physical and mathematical interpretation of the equations in full differentials (three-dimensional case). To the differential equation was the equations in full differentials, it is necessary and sufficient to satisfy the condition of the field of potentiality* $rot\vec{F} = 0$.

В начале, представим классическое рассмотрение.
Дифференциальное уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

Называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции U(x,y), т.е.

$$dU(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{2}$$

Уравнение (1) с учетом (2) можно записать в виде dU(x,y)=0, поэтому его общий интеграл имеет вид

$$U(x,y) = C \tag{3}$$

Для того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{4}$$

Функция U(x,y) может быть найдена из системы уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \tag{5}$$

Либо по формуле

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy\,, \tag{6}$$

где (x_0,y_0) – некоторая точка из области непрерывности функции P(x,y), Q(x,y) и их частных производных.

Многие физические законы имеют вид дифференциальных уравнений, т.е. соотношений между функциями и их производными. Вывод дифференциальных уравнений основан на знании законов изучаемых явлений (1-8).

Поэтому для рассмотрения общего (трехмерного) случая уравнений в полных дифференциалах используем физико-математический подход. Зададим векторное поле $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Запишем для него дифференциальное уравнение

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0 \tag{7}$$

Как проверить, что дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, если оно записано в общем (трехмерном) случае?
Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие потенциальности поля

$$rot\vec{F}=0$$

$$rot\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0$$

Отсюда получаем

$$1)\,\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad 2)\,\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad 3)\,\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

Отсюда следует, как частный случай, условие Грина (4) – условие потенциальности для плоского векторного поля. Функцию U(x,y,z), которая является потенциалом поля, можно найти по формуле

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz \tag{8}$$

где $M(x_0,y_0,z_0)$ – некоторая точка из области непрерывности функции P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) и их частных производных.

Пример

Доказать что данное уравнение $(z-2x)dx+(z-2y)dy+(x+y)dz=0$ является уравнением в полных дифференциалах.

Здесь $P=z-2x,\ Q=z-2y,\ R=x+y;$

Проверим условия потенциальности

$$1)\,\frac{\partial R}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial z}=1,\quad 2)\,\frac{\partial P}{\partial z}=1=\frac{\partial R}{\partial x}=1,\quad 3)\,\frac{\partial Q}{\partial x}=0=\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

Условия выполняются, значит можно находить функцию U(x,y,z). Фиксируя точку $M_0(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$, рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$. Тогда

$$U(x, y, z) = \int_0^x (z_0 - 2x)dx + \int_0^y (z_0 - 2y)dy + \int_0^z (x + y)dz = -x^2\Big|_0^x - y^2\Big|_0^y + (x + y)z\Big|_0^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 - y^2 + (x + y)z$$

Проведем проверку

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial\left[-x^2 - y^2 + (x + y)z\right]}{\partial x} = -2x + z = P$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial\left[-x^2 - y^2 + (x + y)z\right]}{\partial y} = -2y + z = Q$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial\left[-x^2 - y^2 + (x + y)z\right]}{\partial z} = x + y = R$$

Условия выполняются, отсюда следует ответ

$$U(x, y, z) = -x^2 - y^2 + (x + y)z$$

Если дальше продолжать физико-математическую интерпретацию, то можно вычислить работу для этого векторного поля при перемещении тела от точки $M_1(1,2,-1)$ до точки $M_2(1,1,1)$. Так как работа вычисляется по формуле: $A = U(M_2) - U(M_1) = -1 - 1 + (1+1)\cdot 1 + 1 + 4 - (1+2)\cdot(-1) = 8$ Дж.

References:

1. *Shlyakhov AT, Shlyakhova AG. Analogies of physical tasks at the solution of the differential equations: Materials of scientific session of scientists following the results of 2008. Almetyevsk, ASOI, 2009; 313-316.*
2. *Shlyakhov AT, Shlyakhova AG. Dinamik in the differential equation: Materials of scientific session of scientists following the results of 2009. Almetyevsk, ASOI, 2010; 236-243.*
3. *Shlyakhov AT, Shlyakhova AG. Rahmatullin MH. The physical tasks from dynamics leading to the differential equations: Scientific notes of ASOI. Almetyevsk, ASOI, 2010; 310-318.*
4. *Shlyakhov AT, Shlyakhova AG. Research of the movement in a central symmetric field: Materials of scientific session of scientists following the results of 2010. Almetyevsk, ASOI, 2011; 290-293.*
5. *Shlyakhov AT, Varlamova AV, Shlyakhova AG. Modeling of the movement of a material point under the influence of attraction force: Materials of scientific session of scientists following the results of 2011. Almetyevsk, ASOI, 2012; 163-166.*
6. *Brodskaya TA, Larina LN. Mathematical modeling of real processes by means of differential equations: Materials of scientific session of scientists of Almetyevsk state oil institute. Almetyevsk, ASOI, 2009, T.1; 270-272.*
7. *Zaripova ZF. The differential equations in economic models: Materials of scientific session of scientists of Almetyevsk state oil institute. Almetyevsk, ASOI, 2011, T.1; 267-271.*
8. *Shlyakhov AT, Shlyakhova AG, Varlamova AV. Analogies of the physical tasks leading to differential equations: Materials of the All-Russian scientific and practical*

conference "An oil and gas complex: education, science and production" on April 14-18, 2014. Part 2. Almetyevsk, ASOI, 2014; 112-115.