

Tatiana A. Volosatova,
ScD, associate professor,

Rostov State University of Civil Engineering

Haar Interpolation of Financial Markets to the Full, Complete and Regular Global Markets

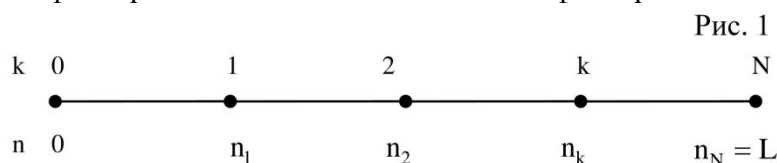
Key words: financial market, the probability measure, interpolation, completeness market, arbitrage-free.

Annotation: This article is devoted to the research of financial (B, S) -market by using interpolation method Haar. Presented is the essence of the method of interpolation and presented Haar criteria interpolated source of the financial market to the overall market, global market and complete the regular full global market.

В финансовой математике финансовые рынки моделируются на некотором стохастическом базисе $(\Omega, (F_k)_{k=0}^N, F, P)$, где Ω – пространство элементарных событий, которые могут произойти на рынке. Пусть Ω – конечное множество. $(F_k)_{k=0}^N$ – возрастающая последовательность σ -алгебр, где F_k представляет собой информацию о рынке, доступную на момент времени k , при этом $F_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $F_N = F$; P – вероятностная мера, нагружающая все атомы D_N σ -алгебры $F_N = F$.

Будем рассматривать (B, S) -рынки, состоящие из детерминированного банковского счета $B = (B_k)_{k=0}^N$, и акций одного типа $S = (S_k, F_k)_{k=0}^N$. Хааровская фильтрация $H = (H_n)_{n=0}^L$ называется хааровской интерполирующей фильтрацией фильтрации $F = (F_k)_{k=0}^N$, если существует последовательность натуральных чисел $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_N := L$, для которой $H_{n_k} = F_k \forall k (0 \leq k \leq N)$, (1).

На рисунке 1 показано соответствие исходной фильтрации и интерполирующей в узловых точках расширенной временной шкалы; т.е. после добавления промежуточных времен. Сверху - исходная временная шкала, внизу - расширенная. Между узловыми точками имеются промежуточные времена. В узловых точках интерполирующая фильтрация H совпадает с исходной фильтрацией F .



Хааровская интерполяция - это такая интерполяция, для которой в результате перехода от предыдущего момента времени к следующему один атом дробится на две части, остальные остаются без изменений (2).

Поясним понятие интерполируемости по Хаару(1) с помощью рис 2. Исходный финансовый рынок, не обладающий свойством R, надо интерполировать, до рынка, обладающего дополнительным свойством R. Сначала стандартным образом производят дисконтирование исходного финансового рынка. Затем находят хааровскую интерполирующую фильтрацию H фильтрации F и интерполяцию Y процесса Z (т.е. процесс Y совпадает с процессом Z в узловых точках), при которых рынок $(1, Y)$ обладает свойством R.



Операция обратная к дисконтированию производится следующим образом: в узловых точках банковский счет интерполирующего и исходного рынков совпадают, а в промежуточные моменты времени проценты не начисляются. Цены акций интерполяционного рынка определяют с помощью операции обратного дисконтирования.

Введем основные понятия, связанные с хааровской интерполяцией финансовых рынков.

Финансовый (B, S) -рынок называется N -полным, если для любого финансового обязательства f_N найдется самофинансируемый портфель $\pi = (\beta_k, \gamma_k)_{k=0}^N$, (где β_k количество единиц банковского счёта, а γ_k — количество акций в портфеле в момент времени k) и начальный капитал x , для которых капитал портфеля в начальный момент времени $X_0^\pi = x$, и в конечный момент времени капитал портфеля достигает финансового обязательства f_N P - почти наверное (3). Это означает, что любое финансовое обязательство f_N может быть выполнено.

Рынок называется *глобально полным*, если он полон по отношению ко всем моментам времени.

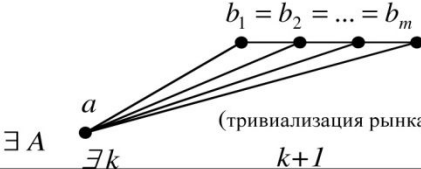
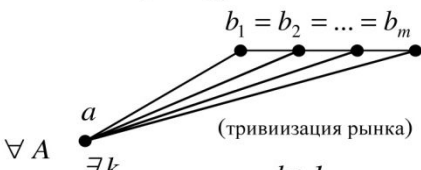
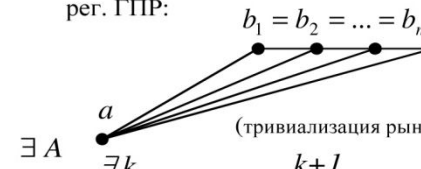
Рынок называется *регулярным* в том случае, если при переходе от момента времени k к моменту времени $k+1$ атом A не дробится, то значение дисконтированной стоимости акции на этом атоме не меняется (если $A \in D_k \Rightarrow A \in D_{k+1}$, то $Z_{k+1}|_A = Z_k|_A$).

Говорят, что на финансовом рынке реализована арбитражная возможность, если существует самофинансируемый портфель π , такой что при нулевом начальном капитале портфеля $X_0^\pi = 0$ вероятность получения прибыли положительная, при этом портфель не может быть убыточным, т.е. $P(X_N^\pi > 0) > 0$ и $P(X_N^\pi \geq 0) = 1$. Финансовый (B, S) -рынок, на котором существуют арбитражные возможности, называют **арбитражным**, в противном случае рынок называют **безарбитражным** (2,5). Рынок является безарбитражным, если он “рациональный”, “честно устроен”, то есть на нем не существует возможности получения прибыли без “риска”. Безарбитражный рынок всегда регулярен, а арбитражный может быть как регулярен, так и не регулярен.

Введем обозначения: $A = \bigcup_{i=1}^m B_i$, $A \in D_k$, $B_i \in D_{k+1}$; $a := Z_k|_A$, $b_i := Z_{k+1}|_{B_i}$.

В таблице 1 представлены основные теоретические результаты: критерий интерполируемости до полного рынка, критерий интерполируемости до глобально полного рынка и критерий интерполируемости до регулярного глобально полного рынка.

Таблица 1

Исходный (B,S)- рынок	Интерпол. (B,S)- рынок	Критерий интерполируемости	График интерполяции
Неполный	Полный	$\exists A \in D_{N-1}:$ $\min_i b_i < \max_i b_i$	Нет интерполируемости до ГПР: $b_1 = b_2 = \dots = b_m$  $\exists A$ $\exists k$
Не ГПР	ГПР	$\forall k (0 \leq k < N)$ $\exists A \in D_k:$ $\min_{1 \leq i \leq m} b_i < \max_{1 \leq i \leq m} b_i$	Нет интерполируемости до ГПР: $b_1 = b_2 = \dots = b_m$  $\forall A$ $\exists k$
Регулярный не ГПР	Регулярный ГПР	$\forall k (0 \leq k < N)$ $\forall A \in D_k:$ $\min_{1 \leq i \leq m} b_i < \max_{1 \leq i \leq m} b_i$	Нет интерполируемости до рег. ГПР: $b_1 = b_2 = \dots = b_m$  $\exists A$ $\exists k$

References:

1. Volosatova TA, Pavlov IV. Interpolation of financial markets to complete markets and minimize the time of the breach of completeness: Proceedings of the higher institutions of higher education. North Caucasus region, 2005, №51; 9-16.
2. Pavlov IV, Nazar'ko OV. Simulation of faults and their elimination in the financial markets with a stream of events generated by a binary tree: Engineering Journal of Don, 2013, T.27, №4; 144.
3. Pavlov IV, Tsvetkova IV, Shamraeva VV. Calculation components hedging portfolio on incomplete markets nondeterministic behavior of buyers of the shares: Engineering Journal of Don, 2013, T.27, №4; 166.
4. Volosatova TA. Arbitration modeling techniques of financial markets in the case of buying the shares: Modern methods and problems of the theory of operators and harmonic analysis and their application: Proceedings of the conference. Rostov-on-Don, 2015; 180.
5. Danekyants AG, Pavlov IV. Approximat-interpolation method of reducing the arbitrage-free financial markets with an infinite number of states to complete and arbitrage-free market with a finite number of states: Review of Applied and Industrial Mathematics, 2005, t.12, №3; 730-731.