

Elena V. Marinchenko,
ScD, associate professor;
Rostov State University of Civil Engineering

About One Algorithm FEM Calculation of Construction Elements and Mechanisms in Case of Defects Presence

Key words: *FEM calculations, data vat localized cracks, stress concentration, Special finite elements.*

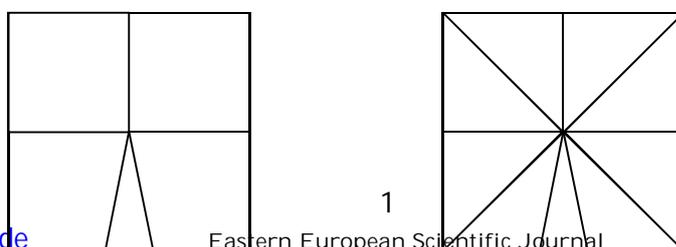
Annotation: *The article contains the approach of FEM calculation of dynamic characteristics stress-strain of elements of buildings and structures in the presence of localized cracks. Accounting for stress concentration enters the group Special finite elements to accurately take due account order particularly busy at crack tip. The proposed algorithm can significantly reduce the time of calculation when storing accuracy.*

Чтобы разработать методы неразрушающего контроля состояния элементов конструкций и механизмов, основываясь на результатах мониторинга их динамических характеристик, полученных при тестовом динамическом воздействии, необходимо провести расчет конструкций при наличии нарушений состояния её элементов МКЭ. Для этой цели применим метод подконструкций, предполагающий введение специальных суперэлементов, которые позволяют учитывать различные типы отклонения данной подконструкции от исправного состояния. Рассмотрим случай одного из наиболее распространенных дефектов в элементах зданий и сооружений – трещины различного размера и ориентации.

Наличие в одном из элементов сооружения локализованных трещин при расчёте динамических характеристик сооружения повышает требования к разбиению его на конечные элементы. Наиболее применяемый алгоритм расчета основывается на введении сетки конечных элементов, сгущающихся в окрестности трещины и особенно ее вершин. При этом существенно увеличивается время счета из-за возрастания числа элементов, и как следствие, снижается точность конечного результата.

Для устранения указанного недостатка целесообразным представляется разработка суперэлементов МКЭ для подконструкции, содержащей локализованную трещину, алгоритма, в основе которого будет использование группы специальных конечных элементов (рис.1), точным образом учитывающих концентрацию напряжений в вершине трещины.

Рисунок 1



1

а – группа специальных элементов с 4 узлами

б – группа треугольных специальных элементов

В центральном узле группы специальных элементов задана особенность напряжений, свойственная вершине трещины. При этом порядок особенности аналитического решения задачи статики определяет степень концентрации напряжений (1,2).

При расположении вершины трещины на некотором удалении от границы области ориентация трещины практически не влияет на порядок особенности. Поэтому необходимую информацию можно получить, рассматривая задачу статического нагружения пространства с трещиной. Чтобы учесть возможное влияние на порядок особенности элемента здания, контактирующего с данной подконструкцией, изучим более общую задачу о статическом нагружении полупространства с вертикально ориентированной трещиной и подкрепленного тонкой поверхностной накладкой (3). На примере этой модельной задачи проиллюстрируем метод решения, используемого здесь при исследовании задачи для двухслойного полупространства с заглубленной трещиной.

Рассмотрим упругое полупространство (свойства материала которого определены модулем сдвига μ , λ и коэффициентом Пуассона ν), соответствующее в декартовой системе координат области $D: y \leq 0; x \in (-\infty, +\infty)$. Ориентация трещины вертикальная ($\varphi = 0$). На берегах трещины компонента $u(x, y)$ вектора перемещений имеет скачок

$$y \in [-H - a; -H + a]: \vec{U}(x, y) = \{u(x, y), v(x, y)\} - u(x, y)_{x=-0}^{x=+0} = \chi(y) \quad (1)$$

и производная

$$\frac{\partial v(x, y)_{x=+0}}{\partial x}_{x=-0} = \psi(y). \quad (2)$$

Поверхность полупространства жестко сцеплена с тонким слоем толщины h , упругие свойства которого определены модулем сдвига μ_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 . На верхнюю грань слоя действуют распределенные усилия

$$y = 0: \vec{\sigma} = \{\tau_{xy}, \sigma_y\}; \quad \tau_{xy} + 0; \quad \sigma_y = \begin{cases} q(x), & x \in [c, d] \\ 0, & x \notin [c, d] \end{cases}$$

Векторы смещения $\vec{U}_1(x, y) = \{u_1(x, y), v_1(x, y)\}$ и напряжения $\vec{\sigma}_1 = \{\sigma_1, \tau_1\}$ точек тонкой накладки толщины h [3] удовлетворяют уравнению:

$$4\mu_1 h \frac{d^2 u_1}{dx^2} = -(1 - \nu_1)(\tau_{++} + \tau_{--}) - \nu_1 h \frac{d(\sigma_{++} + \sigma_{--})}{dx}. \quad (3)$$

Здесь τ_{\pm} - касательные напряжения соответственно на верхней (+) и нижней (-) гранях накладки.

Условие жесткого сцепления накладки с полупространством приводит к тому, что компоненты векторов смещений ($u_1 = u$, $v_1 = v$) и напряжений ($\tau_{-} = \tau_{xy}$; $\sigma_{-} = \sigma_y$) накладки и полупространства равны при $y = 0$. Тогда граничными условиями на поверхности полупространства при учете этого равенства и уравнений равновесия пластины будет следующее соотношение

$$y = 0: \quad 4\mu_1 h \frac{d^2 u}{dx^2} = -(1 - \nu_1)\tau_{xy} - 2\nu_1 h \frac{d\sigma_y}{dx}; \quad \sigma_y = -q(x), \quad (4)$$

где $q(x)$ - закон распределения нормальных напряжений, которые действуют на верхнюю грань накладки.

Для данной задачи уравнения равновесия среды [4] имеют вид

$$\begin{cases} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0; \\ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Учитывая условия на границе трещины (1), (2), применяем к обоим уравнениям системы (5) преобразование Фурье по переменной x (α - параметр преобразования). Окончательно получаем

$$\begin{cases} (1-2\nu) \frac{d^2 \bar{u}(\alpha, y)}{dy^2} - 2(1-\nu)\alpha^2 \bar{u}(\alpha, y) - i\alpha \frac{d\bar{v}(\alpha, y)}{dy} = 2i\alpha(1-\nu)\chi(y); \\ 2(1-\nu) \frac{d^2 \bar{v}(\alpha, y)}{dy^2} - (1-2\nu)\alpha^2 \bar{v}(\alpha, y) - i\alpha \frac{d\bar{u}(\alpha, y)}{dy} = -2\nu \frac{d\chi(y)}{dy} \cdot h\gamma h \end{cases} \quad (6)$$

В результате применения к последним уравнениям преобразования Фурье по координате y : $\tilde{F}(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) \exp(i\beta y) dy$ приходим к следующей системе функциональных уравнений:

$$\begin{cases} [(1-2\nu)\beta^2 + 2(1-\nu)\alpha^2]\tilde{u}(\alpha, \beta) + \alpha\beta\tilde{v}(\alpha, \beta) = -2i\alpha(1-\nu)\tilde{\chi}(\beta) \\ \alpha\beta\tilde{u}(\alpha, \beta) + [(1-2\nu)\alpha^2 + 2(1-\nu)\beta^2]\tilde{v}(\alpha, \beta) = -2i\beta\nu\tilde{\chi}(\beta) \end{cases} \quad (7)$$

Запишем решение данной системы как

$$\tilde{u}(\alpha, \beta) = \frac{\Delta_1(\alpha, \beta)}{\Delta(\alpha, \beta)}; \quad \tilde{v}(\alpha, \beta) = \frac{\Delta_2(\alpha, \beta)}{\Delta(\alpha, \beta)}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha, \beta) &= (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)^2; \\ \Delta_1(\alpha, \beta) &= -i\alpha\tilde{\chi}(\beta)((1-\nu)\alpha^2 + (2-\nu)\beta^2); \\ \Delta_2(\alpha, \beta) &= i\beta\tilde{\chi}(\beta)(\nu\beta^2 - (1-\nu)\alpha^2); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{\chi}(\beta) = \int_{-H+a}^{H+a} \chi(y) \exp(i\beta y) dy.$$

Применим к соотношениям (8) обратное преобразование Фурье по параметру β и найдем интегралы, тогда

$$\begin{aligned} \bar{u}(\alpha, y) &= -\frac{i\alpha}{2\pi(1-\nu)} \int_{-H-a}^{-H+a} \chi(\eta) [(1-\nu)\alpha^2 I_1(\alpha, \eta, y) + \\ &\quad + (2-\nu)I_2(\alpha, \eta, y)] \exp[i\beta(\eta - y)] d\eta; \\ \bar{v}(\alpha, y) &= -\frac{i}{4\pi(1-\nu)} \int_{-H-a}^{-H+a} \chi(\eta) [\nu I_3(\alpha, \eta, y) - (1-\nu)\alpha^2 I_4(\alpha, \eta, y)] d\eta \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\alpha, \eta, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\beta(\eta - y)]}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta = \frac{\pi \exp[-\alpha(\eta - y)]}{2|\alpha|^3} [1 + |\alpha(\eta - y)|]; \\ I_2(\alpha, \eta, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta^2 \exp[i\beta(\eta - y)]}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta = \frac{\pi \exp[-\alpha(\eta - y)]}{2|\alpha|^3} [1 - |\alpha(\eta - y)|]; \\ I_3(\alpha, \eta, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta^3 \exp[i\beta(\eta - y)]}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta = \frac{i\pi}{2} \exp[-|\alpha||\eta - y|] [2 - |\alpha(\eta - y)|] \text{sign}(\eta - y); \\ I_4(\alpha, \eta, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta \exp[i\beta(\eta - y)]}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta = \frac{i\pi \exp[-|\alpha||\eta - y|]}{2\alpha^2} |\alpha(\eta - y)| \text{sign}(\eta - y). \end{aligned}$$

В итоге приходим к общему решению системы дифференциальных уравнений (5) вида

$$\bar{u}(\alpha, y) = -\frac{i\alpha}{4|\alpha|(1-\nu)} \int_{-H-a}^{-H+a} \chi(\eta) [3-2\nu - |\alpha(\eta-y)|] \exp[-\alpha(\eta-y)] d\eta + \\ + (C_1 + C_2|\alpha|y) \exp(\alpha|y);$$

(11)

$$\bar{v}(\alpha, y) = \frac{1}{4(1-\nu)} \int_{-H-a}^{-H+a} \chi(\eta) [2\nu - |\alpha(\eta-y)| \text{sign}(\eta-y)] \exp(-|\alpha(\eta-y)|) d\eta + \\ + i \text{sign} \alpha [C_1 - C_2[\mathcal{G} - |\alpha|y]] \exp(\alpha|y).$$

Здесь $\mathcal{G} = 3 - 4\nu$.

Вычислим значения неопределенных констант, учитывая граничные условия (4) при $y = 0$. Пропедев достаточно громоздкие выкладки и обозначив

$$t_1 = 2\mu_1(3-2\nu); \quad t_2 = -\frac{\mu(1-\nu_1)(1-2\nu)}{2(1-\nu)}; \quad t_3 = 2\mu_1;$$

$$t_4 = -\mu \left[2\frac{1-\nu}{1-\nu_1} + \frac{(1-\nu_1)(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \right]; \quad l_1 = -8\mu_1(1-\nu);$$

$$l_2 = -2\mu(1-\nu_1),$$

в результате найдем:

$$C_1 = -i \text{sign} \alpha \{l_1 h |\alpha| + l_2\}^{-1} \int_{-H-a}^{-H+a} \chi(\eta) (h|\alpha| t_1 + |\alpha|\eta t_2 + \alpha^2 \eta h t_3 + t_4) \exp(\alpha|\eta|) d\eta;$$

$$C_2 = -i \text{sign} \alpha \{l_1 h |\alpha| + l_2\}^{-1} \int_{-H-a}^{-H+a} \chi(\eta) (h|\alpha| s_1 + |\alpha|\eta s_2 + \alpha^2 \eta h s_3 + s_4) \exp(\alpha|\eta|) d\eta.$$

Таким образом, структура общего решения задачи для полуплоскости с трещиной при воздействии произвольно распределенных на ее поверхности усилий $q(x)$ имеет вид:

$$\bar{u}(\alpha, y) = -\frac{i\alpha}{4|\alpha|(1-\nu)} \int_{-H-a}^{-H+a} \chi(\eta) K_{11}(\alpha, \eta, y) d\eta + \int_c^d q(\xi) K_{12}(\alpha, \xi, y) d\xi;$$

$$\bar{v}(\alpha, y) = \frac{1}{4(1-\nu)} \int_{-H-a}^{-H+a} \chi(\eta) K_{21}(\alpha, \eta, y) d\eta + \int_c^d q(\xi) K_{22}(\alpha, \xi, y) d\xi.$$

Если на поверхность тонкого поверхностного слоя действует вертикальная нагрузка, то решение задачи для полуплоскости с трещиной имеет аналогичную структуру.

References:

1. *Alexandrov VM, Smetanin BI, Sobol BV. Thin stress concentrators in elastic bodies. Moscow, Nauka, 1993.*
2. *Popov GY. The concentration of elastic stresses near the stamps, cuts fine inclusions and reinforcements. Moscow, Nauka, 1982.*
3. *Alexandrov VM, Mkhitaryan SM. Contact problems for bodies with thin coatings and layers. Moscow, Nauka, 1983.*
4. *Rekach VG. Guide to solving problems in the theory of elasticity. Moscow, Higher School, 1977.*