DOI 10.12851/EESJ201502C06ART06

Nataliia L. Kostian,
senior lecturer
Kyiv National University of Technologies and Design;

Igor Yu. Bilan,
expert mathematician;

Sergei Gladun,
expert mathematician

The Result of the Study for Solving Ill-conditioned Systems of Linear Equations by a New Method

Key words: *ill-conditioned system of linear equations, least-squares method, Scilab.*

Annotation: *The article presents the results of research in a new method for solving ill-conditioned systems of linear equations, in this implementation is based on the method of least squares. Also describes the implementation of a program for Scilab, and gives the address for downloading. The program is available under the terms of GNU GPL v3.*

Пусть A квадратная матрица из n столбцов и n строк. Пусть B вектор-столбец из n элементов. Рассмотрим уравнение $AX = B$. Для решения этого уравнения разработано множество методов. Если метод детерминированный, то есть для одного и того же уравнения $AX = B$ две разные попытки решения некоторым методом дают один и тот же результат, то мы можем применить недетерминированный метод, улучшающий решение, описанный в этой статье.

Суть метода состоит в следующем: предполагается, что при некоторой перестановке столбцов и строк в матрице A, при этом конечно переменные переименовываются, а при перестановке строк также переставляются элементы B, ошибки в вычислениях станут меньше, и норма вектора-столбца $AX - B$ станет меньше. Однако при этом возникает следующая сложность: различных перестановок n столбцов и n строк $(n!)^2$. Такая сложность делает невозможным применение метода даже для n=40. Поэтому предложенный метод ищет не глобальный, а локальный минимум ошибки. За величину ошибки принимается норма вектора-столбца $AX - B$.

Метод состоит в следующем: в цикле переставляются столбцы матрицы A, причем только столбцы, у которых номера отличаются на менее чем k, k в вычислительном эксперименте бралось равным 9. Если при перестановке столбцов ошибка становилась больше, то производилась обратная замена, то есть матрица A приводилась к виду, как будто этой перестановки не было. Если же перестановка приводила к уменьшению ошибки, то в матрице A такая перестановка сохранялась. Аналогично переставлялись строки. Метод останавливался, и выдавал результат, когда при проходе по всем перестановкам столбцов или строк, отличающимся на k, уменьшения ошибки не наблюдалось.

В качестве метода, который улучшался, брался метод решения систем линейных уравнений с помощью наименьших квадратов. В качестве матриц A брались матрицы Ганкеля. Метод был реализован в системе Scilab. Метод был протестирован для вещественных матриц Ганкеля с n=1000; n=700. Для n=1000 расчеты заняли 3-е суток машинного времени на каждую матрицу. Для n=700 на каждую матрицу расчеты заняли 2-е суток машинного времени. Среднее улучшение точности вычислений, то есть нормы вектора-столбца $AX - B$ для n=700 составило 20%. Улучшение точности вычислений, то есть нормы вектора-столбца $AX - B$ для n=1000 за три попытки составило 40%. Однако следует заметить недостаточную по объему статистическую выборку для n=1000.

Метод реализован как набор функций на интерпретируемом языке программирования Scilab. Метод и его исходный код распространяется под лицензией GNU GPL v3 .

Авторы статьи считают целесообразным тестирование метода для других типов матриц, других типов основных алгоритмов, решающих системы линейных уравнений, на которых можно базировать данный алгоритм. Также имеет смысл использования других значений параметра k. А также имеют смысл реализации данного алгоритма, использующего несколько потоков, в виду чрезвычайно высокой трудоемкости метода.

Также следует отметить то, что для одного и того же уравнения $AX = B$, реализация, запущенная в разные моменты времени, даст различные значения улучшения точности, то есть нормы вектора-столбца $AX - B$, ввиду того, что будут искаться различные локальные минимумы. Из них можно выбрать лучший. Также следует отметить то, что чем лучше улучшение результата, тем как правило больше время расчетов, это следует, по-видимому из того что достигается более значительный локальный экстремум.

Исходный текст программы доступен по адресу:
https://sites.google.com/site/mathbilan/ukr_func

Приведем описание программы и составляющих ее функций:

function l1=test_end(n) это функция созданная для тестирования, n – здесь размер матриц Ганкеля, которые как известно являются довольно плохо определенными, и плохо решаются методом наименьших квадратов. Матрицы Ганкеля, и системы линейных уравнений в виде матрицы A и вектор столбца B, генерируются с помощью функции, вызываемой из test_end под названием jumble1. В нее передается размер матрицы, а на выходе получаем матрицу A и вектор столбец B для тестирования. Потом к матрице A и вектор столбцу B как к системе линейных уравнений применяется X1 = Ukrainian_function(A,B), которая решает данную систему уравнений и записывает решение в X1, и стандартный метод наименьших квадратов из библиотеки Scilab: X=lsq(A,B).

Потом вычислялось улучшение по сравнению со стандартным методом как $\log_{10}\|B - AX\|_1 - \log_{10}\|B - AX_1\|_1$. Данный подход реализован в бесконечном цикле, позволяющем вычислять, и выводить на каждом шаге сумму улучшений, и среднее улучшение.

Теперь детальнее о самой функции Ukrainian_function.

Подфункция jumble переставляет в случайном порядке столбцы и строки системы уравнений (данные о перестановке столбцов содержатся в массивах: Gs_X1_in_X2, Gs_X2_in_X1, а такую перестановку осуществляет функция not_back). Далее основную работу производит функция main2, она переставляет соседние строки и столбцы системы линейных уравнений, и после каждой перестановки проверяет, улучшилось ли решение, которое производится все тем же методом X=lsq(A,B), если решение улучшилось, то перестановка не возвращается назад, если решение не улучшилось, то происходит «откат» перестановки. Функция main2 останавливает свою работу, корда никакие перестановки соседних строк и столбцов не дают улучшений решения. Ввиду большой трудоемкости данного метода попытки улучшить решение происходят столько раз: для размера матрицы менее 20 – 20 раз, для размера матрицы менее 40 но более 20 – 7 раз, для размера матрицы менее 450 но более 40 – 3 раза, более 450 – 1 раз. Лучшее решение сохраняется. Потом функцией total_back производится обратное переименование переменных, вызванных перестановкой столбцов и выдача результата вычислений.

Приведем результаты численного эксперимента для размера матрицы 700 на 700 указанным выше методом расчетов, здесь con – номер матрицы, s3 – сумма описанного выше метода оценки улучшения по всем номерам матриц, s3/con – среднее улучшение:

con=1. ; s3= 0.1452260 ; s3/con= 0.1452260

con= 2. ; s3= 0.1699634 ; s3/con= 0.0849817

con= 3. ; s3= 0.2407517 ; s3/con= 0.0802506

con= 4. ; s3= 0.3667939 ; s3/con= 0.0916985

con= 5. ; s3= 0.3845505 ; s3/con= 0.0769101

con= 6. ; s3= 0.5012338 ; s3/con= 0.0835390

con= 7. ; s3= 0.6828115 ; s3/con= 0.0975445

con= 8. ; s3= 0.8501336 ; s3/con= 0.1062667

con= 9. ; s3= 0.8742993 ; s3/con= 0.0971444

расчеты велись 18 суток. Как видим, среднее улучшение составило $10^{0.0971444} * 100\% - 100\% \approx 20\%$.

Так генератор случайных чисел инициализируется в функции Ukrainian_function моментом времени запуска, то имеет смысл запустить одновременно несколько потоков Scilab, только запущенные в разные моменты времени для одной и той же матрицы и выбрать потом лучшее решение.

Следует отметить, что данный метод будет работать, если вместо метода наименьших квадратов в функции Ukrainian_function использовать метод, который детерминировано использует матрицу A и вектор столбец B для расчетов, и результаты работы которого, например из за ошибок округления, будут меняться при изменении порядка следования строк и столбцов.

Имеет смысл изучение таких аспектов данного метода, как: получение математического ожидания улучшения решения для различных типов матриц и методов решения и используемых в функции Ukrainian_function. А также получение дисперсии и среднеквадратического отклонения для таких распределений.

Также следует отметить возможное эвристическое значение для получения закономерностей перестановок строк и столбцов систем линейных уравнений, для определенных типов матриц и методов их решения с целью получения более качественного решения систем линейных уравнений.

Имеет особый интерес ответ на вопрос, о применимости данного метода к трех-диагональным плохо определенным матрицам, и к разряженным плохо определенным матрицам. Ответ на этот вопрос у авторов отсутствует.

Программа для Scilab выложенная по адресу https://sites.google.com/site/mathbilan/ukr_func и распространяется под лицензией GNU GPL v3.