DOI 10.12851/EESJ201501C06ART02

Sergey M. Borodachev,
ScD, associate professor;
Ural Federal University

Recursive Least Squares Method of Regression Coefficients Estimation as a Special Case of Kalman Filter

Key words: *regression, recursive least squares, Kalman filter.*

Annotation: *The simple derivation of recursive least squares method equations is given as special case of Kalman filter estimation of a constant system state under changing observation conditions.*

Рекуррентный МНК (РНК) широко применяется при обработке данных как в технических приложениях, см. например (1), так и в эконометрике (2). Ниже будет показано, каким образом уравнения РНК легко могут быть получены как применение фильтра Калмана.

Фильтр Калмана для оценки состояния x^t системы

$$x^{t+1} = F^t x^t + w^t, \tag{0.1}$$

$$y^t = H^t x^t + v^t, \tag{0.2}$$

где y^t – наблюдаемая величина, w^t, v^t – шумы системы и наблюдения, $Mw^t = 0$, $Mv^t = 0$, $Q = Mw^t w^{tT}$, $R = Mv^t v^{tT}$, (t = 0, …, T-1), имеет вид (3):

$$P^{t|t-1} = F^{t-1} P^{t-1|t-1} F^{t-1T} + Q, \tag{0.3}$$

$$K^t = P^{t|t-1} H^{tT} (H^t P^{t|t-1} H^{tT} + R)^{-1}, \tag{0.4}$$

$$\hat{x}^{t|t} = F^{t-1}\hat{x}^{t-1|t-1} + K^t(y^t - H^t F^{t-1}\hat{x}^{t-1|t-1}), \tag{0.5}$$

$$P^{t|t} = (I - K^t H^t) P^{t|t-1}. \tag{0.6}$$

Где $\hat{x}^{t|t}$ – оценка состояния по информации на момент t, $P^{t|t}$ – её ковариационная матрица.

Модель линейной множественной регрессии имеет вид

$$y^t = \vec{x}^{tT}\vec{\beta} + e^t, \tag{0.7}$$

где $\vec{x}^t$ – вектор объясняющих переменных (регрессоров), $\vec{\beta}$ – вектор коэффициентов регрессии, e^t – шум, $Me^t = 0$, $\sigma^2 = De^t$. Уравнение (0.7) можно рассматривать в терминах теории систем как уравнение выхода (наблюдения) (0.2) при $\vec{x}^{tT} = H^t$, $\vec{\beta} = \vec{\beta}^t = x^t$, при этом уравнение эволюции системы (0.1) имеет вид $x^{t+1} = I\,x^t$, I – единичная матрица т. к. коэффициенты регрессии (состояние системы) постоянны. И задача оценки вектора коэффициентов регрессии сведена к оценке состояния фильтром Калмана.

Получим формулы оценки вектора коэффициентов регрессии по формулам (0.3) - (0.6):

$$P^{t|t-1} = P^{t-1|t-1},$$

$$K^t = P^{t-1|t-1}\vec{x}^t(\vec{x}^{tT}P^{t-1|t-1}\vec{x}^t + \sigma^2)^{-1},$$

$$\begin{aligned}\hat{\vec{\beta}}^{t|t} &= \hat{\vec{\beta}}^{t-1|t-1} + K^t(y^t - \vec{x}^{tT}\hat{\vec{\beta}}^{t-1|t-1}) = \\ &= \hat{\vec{\beta}}^{t-1|t-1} + P^{t-1|t-1}\vec{x}^t(y^t - \vec{x}^{tT}\hat{\vec{\beta}}^{t-1|t-1})(\vec{x}^{tT}P^{t-1|t-1}\vec{x}^t + \sigma^2)^{-1},\end{aligned} \quad (0.8)$$

$$\begin{aligned}P^{t|t} &= (I - P^{t-1|t-1}\vec{x}^t(\vec{x}^{tT}P^{t-1|t-1}\vec{x}^t + \sigma^2)^{-1}\vec{x}^{tT})P^{t-1|t-1} = \\ &= P^{t-1|t-1} - P^{t-1|t-1}\vec{x}^t(\vec{x}^{tT}P^{t-1|t-1}\vec{x}^t + \sigma^2)^{-1}\vec{x}^{tT}P^{t-1|t-1}.\end{aligned} \quad (0.9)$$

Обозначим $\hat{\vec{\beta}}^{t|t} = \hat{\vec{\beta}}(t+1)$ (в скобках указано, по скольким данным получена оценка) и учтём, что $P^{t|t}$ в нашем случае есть ковариационная матрица оценки вектора регрессии.

Из регрессионного анализа известно (4): $P^{t|t} = \sigma^2 P(t+1)$, где $P(t+1) = (z^T(t+1)z(t+1))^{-1}$ – матрица ошибок, $z(t+1)$ – матрица плана. Тогда (0.8) и (0.9) принимают вид

$$\hat{\vec{\beta}}(t+1) = \hat{\vec{\beta}}(t) + \frac{P(t)\vec{x}^t(y^t - \vec{x}^{tT}\hat{\vec{\beta}}(t))}{\vec{x}^{tT}P(t)\vec{x}^t + 1},$$

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t)\vec{x}^t\vec{x}^{tT}P(t)}{\vec{x}^{tT}P(t)\vec{x}^t + 1}.$$

Эти формулы совпадают с формулами рекуррентного метода наименьших квадратов оценки вектора коэффициентов регрессии (2).

References:

1. *Borodachev SM. Simulation modeling of Recursive Least Square adaptive antennas array: Depos. VINITI, 1990. # 5530 – B90.*
2. *Borodachev SM. Econometrics: a tutorial. Palmarium Academic Publishing, 2012.*
3. *Handbook of Applicable Mathematics, Statistics: ed. W. Ledermann, E. Lloyd, Wiley, 1984.*
4. *Aivazian SA, Mkhitarian VS. Applied statistics and essentials of econometrics. UNITY, Moscow, 1998.*