DOI 10.12851/EESJ201412C06ART12

Rayisa F. Koval'
ScD, associate professor,
Vinnytsia Pirogov National Medical University

Classification of Quadratic Functional Equations for Five Object Variables on Quasigroups

Key words: *quasigroup operations, balanced identities, functional equation, quadratic functional equation, parastrophic equivalence, commutative equivalence.*

Annotation: *We consider functional equations over quasigroup operations. The functional equation $\omega = \upsilon$ is called general if the functional variables contained in its record are pair-wise different, balanced if each object variable has exactly one appearance on the left-hand side and on the right-hand side of the equation, quadratic if each object variable has exactly two appearances in the equation. We prove that every quadratic functional equation for five object variables is commutative equivalent to just one of the functional equations (1) – (23).*

Одним из подходов к изучению квазигрупп является функциональный подход, который призван решать ряд задач, среди которых:

1) установление термальной связи между классами алгебр, а именно, представление операций из данного класса квазигрупп в виде терма, то есть композиции операций алгебр других классов таких, как классы групп, коммутативных групп и т.д., и наоборот, нахождение аксиоматики классов квазигрупп, операции которых являются композициями операций алгебр данного класса (1);

2) описание основных алгебраических понятий одного класса через соответствующие понятия другого класса алгебр, если между классами установлена термальная связь;

3) установление количественных характеристик.

Основными классами квазигрупп, которые рассматриваются, есть многообразия, то есть классы квазигрупп, определяемых тождествами. Эффективным методом анализа тождеств является решение соответствующего функционального уравнения, то есть уравнения, получаемого из данного тождества заменой каждого появления функционального символа функциональной переменной соответствующей арности (2,3).

Во многих работах не отличаются понятия функционального уравнения и понятия общего тождества, однако различие между этими понятиями существует (4,5,6,7). А именно, в квазигрупповий алгебре $(Q; f_1,..., f_k)$ имеет место тождество $\omega = \upsilon$ тогда и только тогда, когда выборка $(f_1,..., f_k)$ является решением соответствующего функционального уравнения, которое получаем из данного тождества заменой символов операций функциональными переменными. Но это же функциональное уравнение может иметь и другие решения. Например, тождества $x \circ y / z = x \setminus (y \circ z)$, $(x / y) \setminus = x \circ (y / z)$ различные в классе квазигрупп, однако каждое из них означает, что и четверка $(\circ; /; \setminus; \circ)$, и четверка $(/; \setminus; \circ; \setminus)$ является решением одного и того же общего функционального уравнения ассоциативности $F_1(F_2(x;y);z) = F_3(x;;F_4(y;z))$. Поэтому изучение функциональных уравнений на квазигруппах можно рассматривать как синтезированное изучение множеств тождеств в квазигруппах.

В теории функциональных уравнений на квазигруппах традиционно изучались два вопроса:

1) нахождение методов решения функциональных уравнений;

2) нахождение применений результатов решения функциональных уравнений к анализу тождеств на квазигруппах.

В работах автора (8,9) дана полная классификация квадратических функциональных уравнений от n (n=2, 3, 4) предметных переменных с точностью до парастрофной равносильности: выделено представителя каждого из классов парастрофной эквивалентности; найдены множества решений уравнений от n (n=2, 3, 4) предметных переменных; установлено, что существует два класса при n=2, четыре класса при n=3 и 17 классов при n=4, найдено ряд инвариантов парастрофной равносильности.

Доказано существование функциональных уравнений, которые не являются квадратичными, но среди компонент решений обязательно имеют изотопы групп. Этим установлено, что класс функциональных уравнений, которые гарантируют изотопность группе намного шире, чем класс тех уравнений, которые ранее изучались (10).

Установлен критерий существования нетривиальных квазигрупповых уравнений на множестве квазигрупповых операций. Дана полная классификация общих неквадратичных функциональных уравнений малой длины на множестве квазигрупповых операций.

Доказано, что от двух предметных и двух функциональных переменных есть два класса парастрофной неравносильности, от двух предметных и трех функциональных переменных есть три класса парастрофной неравносильности, от двух предметных и четырех функциональных переменных – не более 13 классов парастрофной неравносильности.

Кроме того установлено, что каждое парастрофно несократимое квадратичное функциональное уравнение от пяти предметных переменных парастрофно равносильно хотя бы одному из четырех приведенных функциональных уравнений. Приведены решения каждого из этих четырех функциональных уравнений и доказано существование не менее двух классов парастрофной равносильности (11).

Изучению классификации функциональных уравнений с точностью до парастрофной эквивалентности уделяется много времени и сил учёными-математиками во всём мире. До сих пор остаётся открытым вопрос о классификации функциональных уравнений с точностью до коммутативной равносильности. В данной статье дана полная классификация функциональных уравнений от пяти предметных переменных (то есть, уравнений функциональной длины 8) с точностью до коммутативной равносильности.

В статье для предметных и функциональных переменных возьмем их лексикографический порядок, то есть различные переменные будем располагать в алфавитном порядке, а одинаковые - по нумерации индексов.

Операция g называется квазигрупповой, если каждое из уравнений

$$g(x;a) = b,\ \ g(a;y) = b \quad (1)$$

имеет единственное решение для всех $a,b \in Q$. Очевидно, что с каждой квазигрупповою операцией g на множестве Q определены операции *левого* g^l и *правого* g^r деления, которые сопоставляют каждой паре $(a;b)$ решение первого и второго уравнения из (1) соответственно. Операции $g, g^l, g^r, g^*, g^{l*}, g^{r*}$, где $g^*(x;y) := g(y;x)$, есть всеми парастрофами g^σ операции g, которые определяются соотношением

$$g^\sigma(x_{\sigma 1}; x_{\sigma 2}) = x_{\sigma 3} \leftrightarrow g(x_1; x_2) = x_3.$$

Изучение функциональных уравнений и тождеств являются достаточно близкими: выборка квазигрупповых операций удовлетворяет тождество тогда и только тогда, когда эта выборка будет решением соответствующего функционального уравнения, которое получаем из данного тождества заменой символов операций функциональными переменными. Поэтому изучение функциональных уравнений над квазигруппами можно рассматривать как синтезированное изучение совокупности тождеств в квазигруппах. Долгое время функциональные уравнения в алгебре рассматривались не как общая теория, а изучались решения каждого отдельно взятого функционального уравнения, которое возникало в тех или иных исследованиях. В.Д.Белоусов был первым, кто начал исследования функциональных уравнений над квазигруппами. В 1958 году он анонсировал результат, который позже стал известен как "теорема о четырех квазигруппах".

Пусть $X := \{x_0, x_1, x_2, ...\}$ есть множество предметных переменных, то есть переменных, которые принимают значения в произвольно выбранном фиксированном множестве Q; $F := \{f_0, f_1, f_2, ...\}$ есть множество бинарных функциональных переменных, которые принимают значения в множестве бинарных квазигруппових операций множества Q. *Слово* над алфавитами F и X определяется следующим индуктивным определением:

- каждую предметную переменную называть словом;
- если ω_1 и ω_2 слова и $F_i \in F$, то $F_i(\omega_1, \omega_2)$ является словом;
- других слов нет.

Пусть ω, υ - произвольные слова языка второго порядка, которые содержат только предметные и функциональные переменные. Под *функциональным уравнением* мы будем понимать предикат языка второго порядка, являющийся равенством двух слов $\omega = \upsilon$, в котором все предметные переменные связаны квантором всеобщности. *Множеством решений* функционального уравнения $\omega = \upsilon$ на множестве Q называется множество истинности данного предиката, а произвольный элемент этого множества - решением функционального уравнения на множестве Q. То есть *решение* - это последовательность функций (операций), определена на множестве Q, которая превращает данный предикат в истинное высказывание после подстановки вместо функциональных переменных их значений с последовательности при лексикографическом порядке.

Функциональные уравнения называются *равносильными*, если на каждом множестве они имеют одинаковые множества решений.

При изучении функциональных уравнений рассматривают следующие задачи:

- найти одно из решений функционального уравнения;
- найти множество всех решений функционального уравнения на данном множестве или на серии множеств;
- найти множество всех решений данного функционального уравнения на всех множествах и другие вариации в зависимости от задач, которые приводят к решению функциональных уравнений.

Изучение общих функциональных уравнений на квазигруппах имеет свою специфику.

Функциональное уравнение и тождество назовем:

- *уравновешенным относительно переменных* $x, y, \ldots z$, если каждая из этих переменных входит в запись левой и правой части уравнения точно по одному разу;
- *уравновешенным*, если это уравнение уравновешено в отношении всех предметных переменных, входящих в его запись;
- *общим*, если функциональные переменные, входящие в его запись, есть попарно различными.

Слово назовем *безповторным* относительно $x, y, \ldots z$, если каждая из этих переменных входит в его запись точно один раз. Тождество $\omega_1 = \omega_2$ называется *сократимым*, если выполняются условия:

- если xy является подсловом слова ω_1, то xy или yx является подсловом слова ω_2;
- если слово ω_1 имеет вид xu или ux, то слово ω_2 имеет вид xv или vx, где x - свободный элемент.

Мы рассматриваем только общие функциональные уравнения, то есть такие, в которых функциональные переменные не повторяются. Это позволяет обозначать функциональные переменные через (•), имея ввиду, что каждое вхождение символа (•) является новой функциональной переменной. В результате слово

$$f_1(f_2(x, y), f_3(z, f_4(u, v)))$$

будет записываться следующим образом:

$$(x \bullet y) \bullet (z \bullet (u \bullet v)).$$

Для уменьшения количества скобок мы будем опускать символ (•) там, где это не приведет к двусмысленному прочтению. Например, предыдущее слово мы будем записывать так:

$$x \bullet y \bullet z \bullet (u \bullet v).$$

Заметим, что в результате принятых договоренностей общие функциональные уравнения можно рассматривать как тождества в классе группоидов сигнатуры (•). Поскольку функциональные уравнения мы классифицируем с точностью до коммутирования, слова, которые отличаются только наличием подслова $x \bullet y$ в одном слове и подслова $y \bullet x$ – в другом, являются коммутативно равносильными, то есть одинаковыми, поэтому будем считать, что рассматриваем тождество в классе коммутативных группоидов.

Основной результат. Пусть $\omega = \upsilon$ – произвольное тождество в коммутативном группоиде $(Q;\bullet)$. Не теряя общности, будем считать, что в левой части переменные расположены в лексикографическом порядке возрастания. Для записи правой части будем использовать метапеременные, которые принимают значения среди переменных, входящих в запись левой части и различные метапеременные принимают значения различных предметных переменных, поскольку мы рассматриваем только уравновешенные функциональные уравнения.

Предположение. Так как группоид – коммутативный, то для решения поставленной задачи, не теряя общности, можно сделать следующие предположения:

- если t_1, t_2 являются метапеременными и $t_1 t_2$ есть подсловом правой части, то будем считать, что переменная t_1 лексикографически меньше переменной t_2;
- если $t_1 t_2$ есть подсловом левой части, то в правой части переменная t_1 расположена левее, чем переменная t_2.

Действительно, если это не так, то в левой части заменим подслово $t_1 t_2$ подсловом $t_2 t_1$ и осуществим такую замену переменных: все переменные, кроме t_1 и t_2 переименуем теми же символами, что и были, t_1 обозначим через t_2, а t_2 - через t_1.

Лемма 1. Каждое безповторное слово длины 5 приводится заменой операций их коммутированием и переименованием переменных точно к одному из слов

$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz))$, (а) $x \bullet (yu \bullet vz)$, (б) $xy \bullet (u \bullet vz)$ (в)

Доказательство.

В безповторном слове длины 5 возможно 10 типов расположения скобок:

1) $x \bullet (y \bullet (u \bullet vz))$, 6) $x \bullet (y \bullet (uv \bullet z))$,

2) $x \bullet (yu \bullet vz)$, 7) $(xu \bullet yv) \bullet z$,

3) $xy \bullet (u \bullet vz)$, 8) $xy \bullet (uv \bullet z)$,

4) $(x \bullet (y \bullet uv)) \bullet z$, 9) $(xy \bullet u) \bullet vz$,

5) $(x \bullet (yu \bullet v)) \bullet z$, 10) $(x \bullet yu) \bullet vz$.

Типы 1) – 3) совпадают с (а), (б) и (в) соответственно. В седьмом слове переставим подслова, и получим (в). В словах 4), 5), 6) переставим все подслова и получим слово (а). Аналогично в словах 8), 9), 10) получим (в). ■

Итак, все тождества в коммутативном группоиде можно разделить на шесть типов: (аа), (ав), (вв), (бб), (бв) и (аб), где первая буква обозначает тип слова в левой части тождества, а вторая – в правой. Очевидно, что типы (ав) и (ва) совпадают.

Не теряя общности, будем считать, что в левой части тождества переменные расположены в лексикографическом порядке возрастания.
Рассмотрим далее тождества каждого типа отдельно.
Лемма 2. Каждое нетривиальное тождество типа (аа) в комутативном группоиде равносильно одному из тождеств:

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = y \bullet (x \bullet (v \bullet uz)); \quad (1)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = u \bullet (x \bullet (v \bullet yz)); \quad (2)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = v \bullet (x \bullet (y \bullet uz)); \quad (3)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = v \bullet (x \bullet (u \bullet yz)); \quad (4)$$

Доказательство.
Тождества типа (аа) - это уравнение вида $x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = t_1 \bullet (t_2 \bullet (t_3 \bullet t_4 t_5));$ где t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 являются метапеременными и принимают значения в множестве $\{x, y, u, v, z\}$. Не теряя общности, будем считать, что $t_2 \prec t_3$, $t_2 \prec t_4$, $t_2 \prec t_5$, $t_3 \prec t_5$, $t_4 \prec t_5$. Отсюда следует, что $t_5 = z$, а t_2 – наименьший элемент, поэтому $t_2 = x$. Поскольку тождество несократимое, то $t_1 \in \{y, u, v\}$. Учитывая, что t_3 не наибольшая и не наименьшая переменная, то $t_3 \in \{y, u\}$.
Итак, каждое тождество типа (аа) равносильна одному из тождеств:

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = y \bullet (x \bullet (t_3 \bullet t_4 z)); \quad (1')$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = u \bullet (x \bullet (t_3 \bullet t_4 z)); \quad (2')$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = v \bullet (x \bullet (t_3 \bullet t_4 z)); \quad (3')$$

В случае (1') $t_3, t_4 \in \{u, v\}$, но $t_4 \neq v$, поэтому $t_3 = v, t_4 = u$. В этом случае получаем тождество (1).
В случае (2') $t_3, t_4 \in \{y, v\}$, поэтому $t_3 = v, t_4 = y$. В этом случае получаем тождество (2).
В случае (3') $t_3, t_4 \in \{y, u\}$, поэтому $t_3 = y, t_4 = u$ или $t_3 = u, t_4 = y$. В этом случае получаем тождества (3) и (4) соответственно. ■
Лемма 3. Каждое нетривиальное тождество типа (бб) в комутативном группоиде равносильно одному из тождеств:

$$x \bullet (yu \bullet vz) = y \bullet (xv \bullet uz); \quad (5)$$

$$x \bullet (yu \bullet vz) = v \bullet (xy \bullet uz). \quad (6)$$

Доказательство. Тождества типа (бб) - это уравнение вида $x \bullet (yu \bullet vz) = t_1 \bullet (t_2 t_3 \bullet t_4 t_5)$, где t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 являются метапеременными и принимают значения в множестве $\{x, y, u, v, z\}$. Не теряя общности, будем считать, что $t_2 \prec t_3$, $t_2 \prec t_4$, $t_2 \prec t_5$. Отсюда следует, что t_2 – наименьший элемент, поэтому

$t_2 = x$. Поскольку данное тождество является несократимым, то $t_1 \in \{y, u, v, z\}$. Так как в левой части имеем подслова yu, vz, то (согласно предположению) переменная y расположена левее, чем переменная u, а переменная v расположена левее, чем переменная z. Поэтому $t_1 \in \{y, v\}$. Переменная t_5 является наибольшим элементом, поэтому $t_5 = z$. Поскольку подслова длины 2 попарно различны, то имеем два возможных варианта; $t_3 = v, t_4 = u$ или $t_3 = u, t_4 = v$. В результате получаем тождества (5) или (6) соответственно. ■

Лема 4. Каждое нетривиальное тождество типа (вв) в комутативном группоиде равносильна такому тождеству:

$$xy \bullet (u \bullet vz) = uv \bullet (x \bullet yz). \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим теперь тождества типа (вв): $xy \bullet (u \bullet vz) = t_1 t_2 \bullet (t_3 \bullet t_4 t_5)$, где t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 являются метапеременными и принимают значения в множестве $\{x, y, u, v, z\}$. Будем считать, что $t_3 \prec t_5$, $t_4 \prec t_5$. Из последних соотношений следует, что переменная t_5 является наибольшим элементом, то есть $t_5 = z$. Переменные t_1 и t_2 не могут принимать значений x, y (поскольку тождество несократимое), потому $t_1 = u, t_2 = v$. Поскольку в левой части переменная x расположена левее, чем переменная y, то в правой части тождества получаем: $t_3 = x, t_4 = y$.В результате получаем тождество (7). ■

Лемма 5. Каждое нетривиальное тождество типа (аб) в коммутативном группоиде равносильно одному из тождеств:

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = y \bullet (xv \bullet uz), \quad (8)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = u \bullet (xv \bullet yz), \quad (9)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = v \bullet (xy \bullet uz). \quad (10)$$

Лемма 6. Каждое нетривиальное тождество типа (ав) в коммутативном группоиде равносильно точно одному из тождеств:

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = yu \bullet (v \bullet xz), \quad (11)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = yv \bullet (u \bullet xz), \quad (12)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = yv \bullet (x \bullet zu), \quad (13)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = yv \bullet (z \bullet xu), \quad (14)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = uv \bullet (x \bullet yz), \quad (15)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = uv \bullet (y \bullet xz), \quad (16)$$

$$x \bullet (y \bullet (u \bullet vz)) = uv \bullet (z \bullet xy). \quad (17)$$

Лема 7. Каждое нетривиальное тождество типа (бв) в коммутативном группоиде равносильно точно одному из тождеств:

$$x \bullet (yu \bullet vz) = yv \bullet (z \bullet xu), \quad (18)$$

$$x \bullet (yu \bullet vz) = yv \bullet (x \bullet uz), \quad (19)$$

$$x \bullet (yu \bullet vz) = yv \bullet (u \bullet xz), \quad (20)$$

$$x \bullet (yu \bullet vz) = uv \bullet (x \bullet yz), \quad (21)$$

$$x \bullet (yu \bullet vz) = uv \bullet (z \bullet xy), \quad (22)$$

$$x \bullet (yu \bullet vz) = uv \bullet (y \bullet xz). \quad (23)$$

Доказательство лемм 5, 6 и 7 полностью повторяет доказательство предыдущих лемм, поэтому не будем его приводить.

Как следствие из доказанных лемм, получаем справедливость такой теоремы .

Теорема. Каждое нетривиальное общее уравновешенное функциональное уравнение функциональной длины 8 коммутативно равносильно точно одному из функциональных уравнений, которые описываются тождествами (1) - (23).

Вопрос полной классификации уравнений функциональной длины n с точностью до коммутативной равносильности и с точностью до парастрофной равносильности до сих пор остается открытым. Полностью классифицированы функциональные уравнения с точностью до парастрофной эквивалентности от 2, 3, 4 и 5 предметных переменных.

References:

1. *Sokhats'kyi FM. On isotopes of groups I: Ukrainian Math. J, 1995. Volume 47, Issue 10; 1585–1598.*
2. *Belousov VD. Balanced Identities in Aldebagas of Quasidgoups: Aequet. math. 1972. Vol.8. fasc. ½; 1 – 73.*
3. *Sokhats'kyi FM. On the classification of functional equations on quasigroups: Ukrainian Math. 2004, Volume 56, Issue 9; 1259–1266.*
4. *Krapez A. On solving a system of balanced functional equations on quasigroups III: Publications de l'institut mathematique. Nouvelle serie. 1979, T.26 (40); 145 –156.*
5. *Krapez A, Zivkovic D. Parastrophically equivalent quasigroup equations: Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 2010,. № 87 (101); 39-58.*
6. *Belousov VD. Balanced identities in quasigroup: Matem. Zbonik. 1966, №. 70 (112); 55-97.*
7. *Belousov VD. Quasigroups with completely cancelable balanced identities: Studies on the Theory of Binary and n-ary Quasigroups [in Russian], Shtiintsa, Kishinev, 1985; 11–25.*
8. *Koval' RF. A classification of quadratic quasigroup functional equations of small length (Ukrainian): Vesnik KPU im. M. P. Dragomanova, Fiz.-Mat. 5 (2004).*
9. *Koval' RF. Solutions of quadratic functional equations with five object variables on quasigroup operations (Ukrainian): Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh. 11 (2005), Zbl 1137.39303.*
10. *Koval' RF. On a Functional Equation with a Group Isotopy Property: Bulentinul Academiei de ¸stiinte a Republicii Moldova. 2005, N2; 65 – 71.*
11. *Koval' RF. Classification of quadratic parastrophically uncancellable functional equations for five object variables on quasigroups, Ukrainian Math. J. 57/8 (2005); 1249-1261.*