DOI 10.12851/EESJ201412C06ART06

Victor S. Rykhlov,
ScD, associate professor;
Saratov State University

On Multiple Completeness of the Root Functions of a Certain Class of Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients

The results were obtained within the framework of the state task of Russian Ministry of Education and Science (project 1.1520.2014K)

Key words: *Pencil of ordinary differential operators, multiple completeness, root functions.*

Annotation: *We consider the class of pencils of the n-th order ordinary differential operators with constant coefficients. It is assumed that the roots of the characteristic equation of pencils from this class are simple, non-zero and located arbitrarily in the complex plane. Sufficient conditions are formulated for m-fold completeness ($1 \le m \le n$) of the system of root functions of the pencils from this class in the space of summable with square functions on the main segment.*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением (д.в) n-го порядка

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s\le n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbf{C}, \ p_{n0} \ne 0, \tag{1}$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями вида

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j+s\le \kappa_{i0}} \alpha_{ijs}\lambda^s y^{(j)}(0), \quad i = \overline{1,l}, \tag{2}$$

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j+s\le \kappa_{i0}} \alpha_{ijs}\lambda^s y^{(j)}(0) + \sum_{j+s\le \kappa 1} \beta_{ijs}\lambda^s y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{3}$$

где $\lambda,\ \alpha_{ijs},\ \beta_{ijs} \in \mathbf{C},\ \kappa_{i0},\ \kappa_{i1} \in \{0\} \cup \mathbf{N},\ 1 \le l \le n-1.$ Отметим, что краевые условия (2)-(3) в случае $2l < n$ не являются полураспадающимися.

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная ($1 \le m \le n$) полнота системы собственных и присоединенных или, по-другому, корневых функций (к.ф.) этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$.

Основополагающей по этой проблеме является статья М. В. Келдыша (3), в которой была сформулирована (без доказательства) теорема об n-кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного д.в. со специальной главной частью

$$\ell(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и не зависящими от λ распадающимися краевыми условиями (когда часть краевых условий берется только в конце 0 отрезка [0,1], а остальные –в конце 1). Эта теорема была доказана А. П. Хромовым (4) – в случае аналитических коэффициентов д.в. и А. А. Шкаликовым (7) – в случае суммируемых коэффициентов. Случай произвольной главной части д.в. был рассмотрен G. Freiling'ом (1). В работе А. А. Шкаликова (8), относящейся к общему виду пучка $L(\lambda)$ получены достаточные условия n-кратной полноты в пространстве $L_2[0,1]$ системы к.ф. в терминах степенной ограниченности по λ функции Грина пучка на некоторых лучах. Детальное исследование вопроса об n - и m-кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия полураспадающиеся, проведено в книге А. И. Вагабова (9).

Предположим, что корни $\{\omega_\alpha = r_j\,\mathrm{e}^{i\psi_\alpha}\}_1^n$ характеристического уравнения $\sum_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ различны, отличны от нуля и лежат на η лучах ($1 \le \eta \le n$), исходящих из начала координат. Считаем, что справедливы соотношения:

$$0 \le \psi_{\nu_0+1} = \ldots = \psi_{\nu_1} < \psi_{\nu_1+1} = \ldots = \psi_{\nu_2} < \cdots < \psi_{\nu_{\eta-1}+1} = \ldots = \psi_{\nu_\eta} < 2\pi, \qquad (4)$$

где $\nu_0 = 0$, $\nu_\eta = n$.

Считаем, что краевые условия (3) упорядочены таким образом (это не нарушает общность), что при $s_0 = l,\ s_{r+1} = n$ справедливы соотношения:

$$\chi_{s_0+1} = \cdots = \chi_{s_1} < \chi_{s_1+1} = \cdots = \chi_{s_2} < \cdots < \chi_{s_r+1} = \cdots = \chi_{s_{r+1}},$$

где обозначено $\chi_i = \kappa_{i1} - \kappa_{i0},\ i = \overline{l+1, n},$ и γ, δ таковы, что

$$s_\gamma + 1 \le n - k + 1 \le s_{\gamma+1}, \qquad s_\delta + 1 \le k + 1 \le s_{\delta+1}. \qquad (5)$$

Для пучка (1)-(3) с условием (4) не выполняется основные предположения книги[3], а именно, что существует прямая d проходящая через начало координат, не содержащая ω-корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше $n - l$ (например, в случае $\eta = 1$ или $\eta = 2$ при некоторых соотношениях между ν_1, ν_2 и l), а также, что краевые условия являются полураспадающимися.

В статьях (2, 5) исследована кратная полнота системы к.ф. пучка очень близкого к рассматриваемому пучку $L(\lambda)$. Но д.в предполагалось однородным ($p_{js}(x) \equiv 0$ при $j + s < n$ в сумме (1)) и краевые условия (2)–(3) предполагались полураспадающимися ($n - l \le l$ или $2l \ge n$). Некоторые из этих ограничений удалось снять. В статье (6) подробно рассмотрен случай, когда корни характеристического уравнения расположены на двух лучах, исходящих из начала координат, и $l = 0$.

Далее будем называть i-ое краевое условие (2) однородным, если в сумме участвуют только слагаемые с номерами j и s, для которых $j + s = \kappa_{i0}$.

Введем следующее условие:

1°. *Для фиксированного* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *пусть* σ *– перестановка множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *и* $h \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *такие, что:*

$$\operatorname{Re}(e^{i\alpha}\omega_{\sigma(1)}) < \ldots < \operatorname{Re}(e^{i\alpha}\omega_{\sigma(h)}) < 0 < \operatorname{Re}(e^{i\alpha}\omega_{\sigma(h+1)}) < \ldots < \operatorname{Re}(e^{i\alpha}\omega_{\sigma(n)}).$$

В дальнейшем потребуются следующие обозначения:

$$a_{ij} := \sum_{\nu+s=\kappa_{i0}} \alpha_{i\nu s}\omega_{\sigma(j)}^{\nu},\ i=\overline{1,n},\ b_{ij} := \sum_{\nu+s=\kappa_{i1}} \beta_{i\nu s}\omega_{\sigma(j)}^{\nu},\ i=\overline{l+1,n},\ \ j=\overline{1,n},$$

$$\kappa_i = \min\{\kappa_{i0},\kappa_{i1}\},\ i=\overline{l+1,n},\ [j]_+ = \max\{0,j\},\ [i,j]_- = \min\{i,j\}.$$

Для формулировок полученных результатов потребуются следующие определители:

$$a_1 = \det\left(a_{ij}\right)_{i\in\overline{1,l}}^{j\in\overline{1,l}} \neq 0, \qquad a_2 = \det\left(a_{ij}\right)_{i\in\overline{1,l}}^{j\in\overline{n-l+1,\mathrm{n}}} \neq 0,$$

$$b_1 = \det\left(b_{ij}\right)_{i\in\overline{l+1,n}}^{j\in\overline{l+1,n}} \neq 0, \qquad b_2 = \det\left(b_{ij}\right)_{i\in\overline{l+1,n}}^{j\in\overline{1,n-l}} \neq 0,$$

$$A = \begin{vmatrix} \left(a_{ij}\right)_{i=\overline{1,s_\gamma}}^{j=\overline{1,h}} & (0)_{i=\overline{1,s_\gamma}}^{j=\overline{h+1,n}} \\ \left(a_{ij}\right)_{i=\overline{s_\gamma+1,n}}^{j=\overline{1,h}} & \left(b_{ij}\right)_{i=\overline{s_\gamma+1,n}}^{j=\overline{h+1,n}} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} (0)_{i=\overline{1,s_\delta}}^{j=\overline{1,h}} & \left(a_{ij}\right)_{i=\overline{1,s_\delta}}^{j=\overline{h+1,n}} \\ \left(b_{ij}\right)_{i=\overline{s_\delta+1,n}}^{j=\overline{1,h}} & \left(a_{ij}\right)_{i=\overline{s_\delta+1,n}}^{j=\overline{h+1,n}} \end{vmatrix}.$$

Наряду с условием 1°, введем еще одно условие

2°. а) *при* $h \le l$ *пусть* $a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0;$ б) *при* $h > l$ *пусть* $A \neq 0;$

в) *при* $h \ge n-l$ *пусть* $a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0;$ г) *при* $h < n-l$ *пусть* $B \neq 0.$

Обозначим

$$c_{ij}(\lambda) = \sum_{s+\beta\le\kappa_{i0}} \lambda^{s+\beta}\alpha_{i\beta s}\omega_j^{\beta},\ i=\overline{1,l},\ \ j=\overline{1,n},$$

и рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\lambda)d_j = 0, \quad i=\overline{1,l},$$

относительно вектора $\left(d_1,d_2,\ldots,d_n\right)^T$.

Пусть базис пространства решений системы есть $\left(d_{s1}(\lambda),d_{s2}(\lambda),\ldots,d_{sn}(\lambda)\right)^T$, $s=\overline{1,n-l}$. Не нарушая общности, можно считать $d_{ij}(\lambda)$ многочленами.

Составим матрицы

$$D_j(\lambda) = \begin{pmatrix} d_{1,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \ldots & d_{1,\nu_j}(\lambda) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ d_{n-l,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \ldots & d_{n-l,\nu_j}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad j=\overline{1,\eta}.$$

Очевидно, что если краевые условия однородны, то матрицы $D_j(\lambda)$ не зависят от λ.

Обозначим $m = \sum_{j=1}^{\eta} \operatorname{rank} D_j(\lambda)$.

Теорема 1. *Если при некотором* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *выполняются предположения* 1°–2° *и* $m = n$, *то система к.ф. пучка* $L(\lambda)$ n*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum_{i=l+1}^{n} [n-1-\kappa_i]_+$, *если порядок хотя бы одного краевого условия (2)–(3) больше* $n-1$, *и с нулевым дефектом в противном случае.*

Очевидно, что $m = n$ только тогда, когда $\operatorname{rank} D_j(\lambda) = \nu_j - \nu_{j-1}$.

Следствие 1. *Если при некотором* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *выполняются предположения* 1°–2°, $m = n$ *и краевые условия* (2) *однородны, то система к.ф. пучка* $L(\lambda)$ n*-кратно полна в* $L_2[0,1]$*.*

Теорема 2. *Если при некотором* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *выполняются предположения* 1°–2°, $m < n$, *д.в.* (1) *и краевые условия* (2) *однородны, то система к.ф. пучка* $L(\lambda)$ k*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *при* $k \le m$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum_{i=l+1}^{n} [k-1-\kappa_i]_+$.

References:

1. *Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel: Math. Z. 1984, Vol. 188, №. 1; 55–68.*
2. *Freiling G. Über die mehrfache Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und assoziierten Funktionen irregulärer Operatorenbüschel in* $L_2[0,1]$*: ZAMM. 1985. Vol. 65, № 5; 336 – 338.*
3. *Keldysh MV. On eigenvalues and eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint equations: Dokl. AN SSSR. 1951, Vol. 77, №1; 11 – 14. (in Russian).*
4. *Khromov A P. Finite-dimensional perturbations of Volterra operators: Dr. phys. and mat. sci. diss. Novosibirsk, 1973,242. (in Russian).*
5. *Rykhlov V S. Multiple completeness of the eigenfunctions of an ordinary differential polynomial pencil: Issledovaniya po teorii operatorov: Sb. Statei. Ufa: BNC UrO AN SSSR, 1988; 128–140.*
6. *Rykhlov V S, Blinkova OV. On multiple completeness of the root functions of a certain class of pencils of differential operators with constant coefficients: Izv. Sar. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform. 2014, Vol. 14, Iss. 4. Part. 2, 574–584.*
7. *Shkalikov AA. On completeness of eigenfunctions and associated function of an ordinary differential operator with separated irregular boundary conditions, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 1976, Vol. 10, №4; 69–80.(in Russian).*
8. *Shkalikov AA. Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions: J. Soviet Math. 1986, Vol. 33, Iss. 6;1311 – 1342.*

9. *Vagabov AI. Introduction to spectral theory of differential operators, Rostov-na-Donu: Izd-vo Rost. un-ta, 1994;160. (in Russian).*