DOI 10.12851/EESJ201410C05ART01

Arsen I. Atnagulov, *assistant lecturer;*
Bashkir State Agrarian University

Spectral Projectors and Laplace-Beltrami Unagitated Operator Resolvent on a Three-dimensional Sphere

Key words: *Projector, resolvent, operator.*

Annotation: *This article considers a Laplace-Beltrami operator on a three-dimensional sphere. To calculate the asymptotics of an agitated operator and its core, it is necessary to first find out the properties of an unagitated operator, in particular, calculate the core of its orthogonal projector on its own subspace.*

Оператор Лапласа –Бельтрами на трехмерной сфере s^3 имеет вид

$$L_0 u = -\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2\right) + \frac{Lu}{\sin^2\theta_2}, 0 < \theta_2 < \pi, \tag{1}$$

где L - оператор Лапласа-Бельтрами в s^2 переменных $(\varphi,\theta_1), 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 < \theta_1 < \pi$

$$Lu = -\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial u}{\partial\theta_1}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \tag{2}$$

L_0 рассматривается в гильбертовом пространстве $H = L^2\left(s^3, d\mu\right)$, где $d\mu = \sin\theta_1 \sin^2\theta_2 d\varphi d\theta_1 d\theta_2$

Спектр L_0 дискретен и состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+2)$ кратности $(n+1)^2$ $(n = 0,1,..)$

Соответствующий ортогональный проектор на собственное подпространство есть $(n+1)^2$-мерный оператор с ядром

$$P_n\left(\varphi,\theta_1,\theta_2,\overset{0}{\varphi},\overset{0}{\theta}_1,\overset{0}{\theta}_2\right) = \sum_{l=0}^{n} f_l^{(n)}(\theta_2) f_l^{(n)}\left(\overset{0}{\theta}_2\right) P_l\left(\varphi,\theta_1,\overset{0}{\varphi},\overset{0}{\theta}_1\right),$$

(3)

$$\text{где } P_l\left(\varphi,\theta_1;\overset{0}{\varphi},\overset{0}{\theta}_1\right) = \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta_1,\varphi)\overline{Y_l^m}\left(\overset{0}{\theta}_1,\overset{0}{\varphi}\right), \tag{4}$$

$Y_l^m(\theta_1,\varphi)$- сферические функции: $m=-l,..,l \quad LY_l^m(\theta_1,\varphi)=l(l+1)Y_l^m(\theta_1,\varphi)$,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta_1 \left|Y_l^m(\theta_1,\varphi)\right| d\theta_1 = 1, \tag{5}$$

$f_l^{(n)}(\theta_2)$ есть решение дифференциального уравнения

$$-\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2 \frac{\partial f_l^{(n)}(\theta_2)}{\partial\theta_2}\right)+\frac{l(l+1)}{\sin^2\theta_2} f_l^{(n)}(\theta_2)=n(n+2)f_l^{(n)}(\theta_2),$$

(6)

такое, что

$$\int_0^{\pi} \sin^2\theta_2 \left| f_l^{(n)}(\theta_2)\right|^2 d\theta_2 = 1 \tag{7}$$

Из (6) следует, что функция

$$g_l^{(n)}(\theta_2)=\sin\theta_2 f_l^{(n)}(\theta_2) \tag{8}$$

есть решение уравнения

$$-\frac{d^2}{d\theta_2^2} g_l^{(n)}(\theta_2)+\frac{l(l+1)}{\sin^2\theta_2} g_l^{(n)}(\theta_2)=(n+1)^2 g_l^{(n)}(\theta_2) \tag{9}$$

причем $\int_0^{\pi} \left|g_l^{(n)}(\theta_2)\right|^2 d\theta_2 = 1$ (10)

Кроме того, имеют место соотношения:

1) При $\theta_2 \to +0 \quad g_l^{(n)}(\theta_2) \approx c_1\theta_2^{l+1}, c_1 \neq 0$
2) При $\theta_2 \to \pi-0 \quad g_l^{(n)}(\theta_2) \approx c_2(\pi-\theta_2)^{l+1}, c_2 \neq 0$ (11)

Из (11) и (8) следует, что:

1) При $\theta_2 \to +0 \quad f_l^{(n)}(\theta_2) \approx c_1\theta_2^{l}, c_1 \neq 0$
2) При $\theta_2 \to \pi-0 \quad f_l^{(n)}(\theta_2) \approx c_2(\pi-\theta_2)^{l}, c_2 \neq 0$ (12)

Справедливо следующее утверждение

Лемма.

Пусть $\overset{0}{\omega} = \left(\sin \overset{0}{\theta}_2 \cos \overset{0}{\varphi} \sin \overset{0}{\theta}_1, \sin \overset{0}{\theta}_2 \sin \overset{0}{\varphi} \sin \overset{0}{\theta}_1, \sin \overset{0}{\theta}_2 \cos \overset{0}{\theta}_1, \cos \overset{0}{\theta}_2 \right)$,

$\omega = \left(\sin\theta_2 \cos\varphi \sin\theta_1, \sin\theta_2 \sin\varphi \sin\theta_1, \sin\theta_2 \cos\theta_1, \cos\theta_2 \right)$,

α -угол между $\omega, \omega_0 \in s^3$. Тогда ядро (3) представляется в виде

$$P_n(\omega, \omega_0) = \frac{(n+1)\sin(n+1)\alpha}{2\pi^2 \sin\alpha} \tag{13}$$

Доказательство.

Воспользуемся представлением ядра $G_0(x-y)$ неограниченного оператора $G_0 = (-\Delta)^{-1}$ в $L^2(R^4)$:

$$G_0(|x-y|) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(r,t) P_n(\omega, \omega_0), \tag{14}$$

где $x = r\omega, y = t\overset{0}{\omega}$, $r = |x|, t = |y|$, $P_n(\omega, \omega_0)$ задано равенством (3),

$$G_n(r,t) = \frac{1}{2(n+1)} \begin{cases} r^{-n-1/2} t^{n+3/2}, t < r \\ t^{-n-1/2} r^{n+3/2}, t > r \end{cases}$$

Так как $|x-y|$ не зависит от применения одного и того же неортогонального преобразования векторов $x, y \in R^4$, то в правой части (14) в качестве θ_2 можно выбрать угол α, а в качестве $\overset{0}{\theta}_2$=0, причем из (12) следует, что $f_l^{(n)}(0) = 0$ для всех $n : 0 < l \le n$, следовательно,

$$G_0(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(r,t) f_0^{(n)}(\alpha) f_0^{(n)}(0) P_0 \tag{15}$$

Остается вычислить $f_0^{(n)}(\alpha), f_0^{(n)}(0)$ и P_0.

Согласно (7)-(9) имеем:

$f_0^{(n)}(\alpha) = \dfrac{g_0^{(n)}(\alpha)}{\sin\alpha}$, $-\dfrac{d^2}{d\alpha^2} g_0^{(n)}(\alpha) = (n+1)^2 g_0(\alpha)$, причем

$$\int_0^{\pi} \left| g_0^{(n)}(\alpha) \right|^2 d\alpha = 1, \tag{16}$$

так что $f_0^{(n)} = c\dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$ (17)

и $c = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$, $f_0^{(n)}(0) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(n+1)$ (18)

Далее, $P_0 = a^2, a -$ постоянная, причем

$$4\pi a^2 = 1 \tag{19}$$

Теперь, сравнивая (14) и (15), применяя метод индукции по n, установим (13). Лемма доказана.