DOI 10.12851/EESJ201408C04ART01

Maretta L. Kazaryan*,*
ScD, Associate Professor,
North-Ossetian State University,
North-Ossetian State Pedagogical Institute,
Financial University under the Government of the Russian Federation;

Study of Haar's Wavelet Transforms in Space Monitoring of the Earth

Keywords: *space technology, remote sensing of Earth, space monitoring, Fourier transformation, discrete wavelet transform, Haar series.*

Annotation: *We investigate the use of orthogonal transformations in Earth remote sensing techniques, allowing a spacecraft to get information of medium and high resolution and carry out hyperspectral measurements. While perfecting the photographs the apparatus of discrete orthogonal transforms is used, the wavelet transform, in particular. Haar's wavelets are examined, their research of correctness is conducted.*

Одной из наиболее актуальных проблем современной цивилизации являются твердые бытовые отходы, борьба с загрязнением природы. Во время найденная несанкционированная мусорная свалка дает возможность подключить общественность и соответствующие государственные органы для принятия необходимых мер борьбы с подобными явлениями (1). Дистанционное зондирование Земли (ДЗЗ) дает возможность объективно и оперативно решить данную проблему (2). При работе с аэрокосмическими снимками встает вопрос об автоматизации выполнения различных процессов. Это касается этапа измерения координат фиксированных точек снимков и распознавания объектов. Для автоматизированного дешифрования необходимо использовать вейвлет – анализ (3,4,5,10). Вейвлет – преобразование дает возможность исключать из рассмотрения мелкие незначительные детали, мешающие общему восприятию изображения, как в интерактивной обработке снимков дистанционного зондирования, так и автоматизированной их обработке. Анализ коэффициентов вейвлет-разложения указывает на связь между их значениями и отклонениями сигнала (11). Это свойство можно использовать при расшифровании космических снимков. Остановимся подробнее на вейвлет-преобразованиях Хаара и проведем некоторые теоретические исследования. Исследования вейвлет - преобразований Хаара на корректность уже проводились (11). В данной статье предлагается продолжить начатые исследования.

Предварительные сведения. Известно (6), что задача суммирования ряда Фурье интегрируемой с квадратом на отрезке $[a,b]$ функции $f(t)$ с приближенными коэффициентами $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ вместо точных коэффициентов

$$a_k = \int_a^b f(t)\ \psi_k(t)dt \qquad , \quad k = 1,2,\ldots.$$

по некоторой ортонормированной системе функций $\{\psi_k(t)\}$ является некорректно поставленной. А именно, если

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_k - a_k)^2 \le \delta^2 \quad , \qquad \delta > 0 \qquad (1)$$

то погрешность, то есть отклонение функции $f(t)$ и суммы ее ряда Фурье с коэффициентами $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ вместо $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, в равномерной метрике может оказаться сколь угодно большой.

Определение 1. Определим функции вейвлет Хаара следующим образом (10):

$$\chi_1(t) \equiv 1$$

$$\chi_{mj}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{при} \quad t \in [\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{2j-1}{2^m}) \\ -2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{при} \quad t \in [\frac{2j-1}{2^m}, \frac{j}{2^{m-1}}) \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

где $m = 1, 2, \ldots$; $j = 1, \ldots, 2^{m-1}$, а при $j = 2^{m-1}$ правый из отрезков считается замкнутым также справа. При нумерации функций одним индексом k полагается $k = 2^{m-1} + j$.

Это определение отличается от определения самого Хаара (7) значениями функций Хаара в точках разрыва, но при этом сохраняется основное свойство системы Хаара - равномерное стремление ряда Фурье - Хаара непрерывной на [0,1] функции *f(t)* к *f(t).*

В случае системы Хаара не удовлетворяется условие равномерной ограниченности, а предложенный в [6] метод не обеспечивает непрерывность функции, аппроксимирующей непрерывную функцию. Эти исследования были уже проведены (11).

Также ранее (11) было обосновано рассмотрение задачи регуляризации ряда вейвлет – Хаара с приближенными коэффициентами.

В решении этой задачи значительную роль играют классы S_p, $1 \le p < \infty$, которые были введены и детально описаны И. М. Соболем (см. 8) для изучения многомерных квадратурных формул и содержат функции с быстро сходящимся рядом вейвлет – Хаара.

Определение 2 (8). Через S_p, $1 \le p < \infty$ обозначим класс функций *f(t)*, удовлетворяющих условиям:

1) представимы рядом Хаара:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t)$$

2)

$$A_p(f) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |a_{mj}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \le A \quad , \text{где } A = const, \ A \ge 0. \qquad (2)$$

Пусть

$$S_p = \bigcup_{A \ge 0} S_p(A)$$

Введем несколько обозначений. Через $C_{(0,1)}$ обозначим пространство функций, непрерывных на отрезке [0,1], а через $L^p_{(0,1)}$ - пространство интегрируемых в p – ой степени функций [9].

Определим функцию $\varphi(t)$, представляющую обобщенный метод суммирования и являющуюся аналогом сумматорной функции из (6) , следующим образом.

Определение 3. Непрерывную справа в точке 0 монотонную функцию $\varphi(t)$ с

$$\varphi(0)=1; \quad \lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0; \qquad \int_0^\infty \varphi(t)t^{-\frac{1}{2}}dt<\infty \qquad (3)$$

назовем обобщенной сумматорной функцией, а метод суммирования рядов посредством этой функции - обобщенным методом суммирования.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1(11). Если ряд Хаара

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\chi_k(t)$$

с произвольными действительными коэффициентами, сходится равномерно на [0, 1] , то он является рядом Фурье – Хаара для своей суммы.

Пусть вместо точных коэффициентов $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $f(t)$ известны их приближенные значения $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, что удовлетворяется соотношение (1). Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 2 (11) . Пусть $f(t)\in S_p$, $1\le p\le\infty$, $t\in[0,1]$, $\alpha=\alpha(\delta)$ монотонно стремится к нулю и $\delta\alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, тогда:

1. $f_\delta(\alpha,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\alpha k)c_k\chi_k(t)$ принадлежит $S_{p'}$, $p'=\max(2,p)$;
2. $f_\delta(\alpha,t)$ равномерно на [0, 1] стремится к $f(t)$.

Учитывая условие (2), теорему 2 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 3 (11). Пусть последовательность действительных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2) и вместе с $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ - условию (1). Пусть далее $\propto=\propto(\delta)$ монотонно стремится к нулю и $\delta\alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. Тогда

1. Функции $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\chi_k(t)$ и $f_\delta(\alpha,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\alpha k)c_k\chi_k(t)$ принадлежат соответственно классам S_p , $1\le p<\infty$ и $S_{p'}$, $2\le p<\infty$;
2. $f_\delta(\alpha,t)$ равномерно на [0,1] стремится к $f(t)$.

Регуляризованное суммирование ряда непрерывной функции. Классы S_p , $1\le p<\infty$ содержат достаточно большое количество непрерывных функций. Но поскольку не все непрерывные функции входят в классы S_p, то отдельное рассмотрение задачи для классов $C_{(0,1)}$ представляется целесообразным. Здесь мы докажем аналог теоремы 2 для функций из $C_{(0,1)}$. Мы убедимся, что, как и в предыдущей теореме, аппроксимирующая функция принадлежит классу $S_{p'}$, $2\le p'<\infty$.

Теорема 4. Пусть $f(t)$ непрерывная на [0,1] функция, $0 < \propto \leq 1$, $\propto = \propto (\delta)$ монотонно стремится к нулю и $\delta\, \alpha^{-\frac{1}{2}}\ (\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда

$$f_\delta(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) c_k \chi_k(t)$$

1. стремится к $f(t)$ равномерно на отрезке [0,1];
2. при фиксированном $\propto$, $f_\delta(\alpha, t) \in S_{p'}$, $p' \geq 2$.

Доказательство. Рассмотрим отклонение

$$\left| f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) c_k \chi_k(t) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{k(\propto)} [1 - \varphi(\alpha k)] a_k \chi_k(t) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=k(\propto)+1}^{\infty} a_k \chi_k(t) \right| + \left| \sum_{k=k(\propto)+1}^{\infty} a_k \varphi(\alpha k) \chi_k(t) \right|$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) \gamma_k \chi_k(t) \right| = = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

Отдельно оценим суммы S_1, S_2, S_3, S_4. Для S_1 получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{k(\propto)} [1 - \varphi(\alpha k)] a_k \chi_k(t) \right| \leq [1 - \varphi(\alpha k(\propto))] \sum_{k=1}^{k(\propto)} |a_k \chi_k(t) \leq|$$

$$\leq A\,[1 - \varphi(\alpha k(\propto))] \sum_{m=1}^{m(\propto)-1} 2^{\frac{m-1}{2}},$$

, где $A = const$, $k(\propto) \leq 2^{m(\propto)-1} \leq 2\,k(\propto)$. Поскольку

$$\sum_{m=1}^{m(\propto)-1} 2^{\frac{m-1}{2}} \leq 2\sqrt{k(\propto)},$$

следовательно

$$S_1 \leq A_1\,[1 - \varphi(\alpha k(\propto))]\,\sqrt{k(\propto)}$$

$$= A_1\,[1 - \varphi(\alpha k(\propto))]\,k(\propto)\,\frac{1}{\sqrt{k(\propto)}}$$

где $A_1 = const$. Ввиду непрерывности справа функции $\varphi(t)$ в точке $t = 0$, всегда можно выбрать $\propto$ и, соответственно, число $k(\propto)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varphi(\alpha k(\propto)) \geq 1 - \frac{C}{k(\propto)}$$

Откуда следует, что

$$S_1 \leq \frac{C}{k(\propto)}, \quad C = const$$

И, следовательно, S_1 стремится к нулю при $\propto \to 0$.

Сумма S_2 является остатком разложения непрерывной функции по системе функций Хаара и оценивается с помощью непрерывности этой функции следующим образом (8):

$$S_2 \leq C_0\ \omega\left(\frac{1}{k(\propto)},\quad f\right),\quad C_0 = const$$

Сумма

$$\sum_{k=k(\alpha)+1}^{\infty} a_k\ \varphi(\alpha k)\chi_k(t)$$

есть остаток равномерно сходящегося ряда. Действительно, так как *f(t)* непрерывна, то частные суммы ее разложения

$$\sum_{k=1}^{N} a_k\ \chi_k(t)$$

ограничены, а $\varphi(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \to 0$, следовательно, согласно признаку Дирихле, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\ \varphi(\alpha k)\chi_k(t)$$

сходится равномерно, откуда следует, что S_3 равномерно стремится к нулю при $k \to \infty$.

Перейдем к оценке суммы S_4.

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\ \varphi(\alpha k)\chi_k(t)\right| = \left|\gamma_1\ \varphi(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj}\ \varphi\big(\alpha(2^{m-1}+j)\big)\chi_{mj}(t)\right| \leq$$

$$\leq |\gamma_1\ \varphi(\alpha)| + \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj}\ \varphi\big(\alpha(2^{m-1}+j)\big)\chi_{mj}(t)\right|$$

Поскольку

$$\left|\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj}\ \varphi\big(\alpha(2^{m-1}+j)\big)\chi_{mj}(t)\right|$$

$$\leq \delta\left(\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \varphi^2\left(\alpha(2^{m-1}+j)\right)\chi_{mj}^2(t)\right)^2 \leq$$

$$\leq \quad \delta\ \varphi(\alpha\ 2^{m-1})\ 2^{\frac{m-1}{2}},$$ то

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\ \varphi(\alpha k)\ \chi_k(t)\right| \leq \delta + \delta\sum_{m=1}^{\infty}\varphi(\alpha 2^{m-1})\ 2^{\frac{m-1}{2}}$$

Отсюда, учитывая условия, наложенные на $\varphi(t)$ (см. (3)), нетрудно убедиться, что

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\ \varphi(\alpha k)\ \chi_k(t)\right| \leq \delta + \delta\ \frac{\propto^{-\frac{1}{2}}}{ln2}\int_0^{\infty}\varphi(t)\ t^{-\frac{1}{2}}\,dt \leq C_1\,\delta(\alpha)\ \alpha^{-\frac{1}{2}},$$

где $C_1 = const.$

Таким образом, первая часть теоремы доказана, так как сопоставление полученных для сумм S_1, S_2, S_3, S_4 оценок показывает, что равномерная сходимость $f_\delta(\alpha,t)$ к *f(t)* обеспечена.

Докажем вторую часть теоремы. Из доказательства первой части, очевидно, что функция $f_\delta(\alpha,t)$ есть сумма равномерно сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\alpha k)\ c_k\ \chi_k(t)$ и, что согласно теореме 1 функция $f_\delta(\propto,t)$ представима своим рядом Фурье-Хаара. Это означает, что первое условие определения классов S_p выполнено. Не трудно убедиться, что коэффициенты функции $f_\delta(\propto,t)$ удовлетворяют условию (2). Именно, при $p' \geq 2$ и фиксированном $\propto$.

$$A_p\big(f_\delta(\propto,t)\big)=\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m-1}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left|\varphi(\propto\ (2^{m-1}+j))C_{mj}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m-1}{2}}\varphi(\propto\ 2^{m-1})\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left|C_{mj}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m-1}{2}}\varphi(\propto\ 2^{m-1})\left(\sum_{k=1}^{\infty}C_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Здесь мы воспользовались следующим известным неравенством (9): если $0<q<q'$, то

$$\max_{1\leq j\leq M}\left|U_j\right| \leq \left\{\sum_{j=1}^{M}\left|U_j\right|^{q'}\right\}^{\frac{1}{q'}} \leq \left\{\sum_{j=1}^{M}\left|U_j\right|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}} \quad [41]$$

Обозначим $\propto 2^x = t,\ \propto 2\ln 2\cdot 2^x\,dx = dt$. Тогда для $A_p\big(f_\delta\ (\propto,t)\big)$ получаем такую оценку

$$A_p\big(f_\delta(\propto,t)\big) \leq C_2 \propto^{\frac{-1}{2}}\int_0^{\infty}\varphi\,(t)t^{\frac{-1}{2}}dt = C_3\propto^{\frac{-1}{2}}, \qquad C_3 = const$$

Следовательно, для каждого фиксированного $\propto$ функция $f_\delta(\propto,t)$ принадлежит S_2. Теорема доказана.

Выводы.

В работе исследуются ряды вейвлет-Хаара на корректность методом регуляризации Тихонова. Рассматривается задача регуляризованного суммирования для классов $C_{(0,1)}$.

Доказана теорема об устойчивости и равномерной сходимости регуляризованного обобщенной сумматорной функцией ряда вейвлет-Хаара из класса непрерывных функций с приближенными коэффициентами, а также доказано, что аппроксимирующая функция принадлежит классу $S_{p'},\quad 2\leq p<\infty$.

Исследуется вейвлет-анализ при дешифровании космических снимков, и проводится ряд экспериментов, из которых следует возможность применения метода регуляризации Тихонова.

References:

1. *Shahramanjan MA. New Information Technologies in the problems of national security of Russia (natural-technological aspects). Monograph. Moscow Institute of Civil Defense FC, 2003; 398, with illustration.*
2. *Shovengerdt RA. Remote sensing. Methods and image processing model. M.: Technosphere, 2010; 560.*
3. *Chui K. Introduction to Wavelets. M, 2001; 412.*
4. *Dobechies I. Ten Lectures on wavelets. SIAM, Philadelphia, 1992; 120.*
5. *Shtark GG. Application of wavelets for DSP. M. Technosphere, 2007; 192.*
6. *Tikhonov AN. About sustainable methods of summation of Fourier series - Dokl. USSR Academy of Sciences, 1964, Vol. 156, № 2; 268-271.*
7. *Haar A. Zur Theoria der orthogonalen Funktionsysteme. Math.Fnn. 1910, 69; 331 - 371.*
8. *Sobol IM. Multidimensional quadrature formulas and Haar functions. - Moscow: Nauka, 1969; 288.*
9. *Fikhtengolts GM. Course of differential and integral calculus. - Moscow: Nauka, 1964, Vol.2; 463.*
10. *Kazaryan ML. The study of digital processing of signals by discrete orthogonal transformations for stability. Monograph. Vladikavkaz, 2009; 81.*
11. *Kazaryan ML. Haar wavelet transform in the telecommunications system and their research on sustainability//Telecommunications. 2014, № 9;10-25.*