DOI 10.12851/EESJ201406C02ART01

Muhabbat A. Khizirova,
ScD;
Patam T. Grigorjeva,
ScD;
Zuhra K. Bitileuova,
ScD, associate professor,
Kazakh Academy of Transport and Communication n.a. M. Tynyshpaev

Development of Procedures for the Selection of Ways to Strengthen Iron Subgrade Using Method of Finite Elements

Keywords: *junction (point): finite element, form fuction, which is expressed through the coordinates, which determines an approximation to the unknown element; derivatives of the form functions; loeal striffness matrix element; global matrix (stiffness, damping, thermal conductivity, ete); model (constitutive aquations); vectors; tensors, differential operators and other.*

Annotation: *This article develops the ways to enhance the procedures for the selection of subgrade railways constructed on weak foundations using finite element method.*

В настоящее время полноценное методическое обеспечение проектирования грунтовых сооружений с использованием геоматериалов, подтвержденное соответствующими нормативными документами, только формируется. Сегодня, в связи с разработкой общих алгоритмов решения краевых задач теории упругости и эффективных численных методов их компьютерной реализации, перспективы решения задач определения напряженно-деформированного состояния в неоднородных и сложных в геометрическом отношении областях существенно расширились. Однако все еще большие трудности вызывает практическое применение тех или иных моделей и методов к расчету реальных сооружений, решению специфических задач, к которым можно отнести расчет армированного геоматериалом земляного полотна. В связи с этим разработка с позиций механики деформируемого тела вопросов расчета напряженно-деформированного состояния земляного полотна, усиленного геоматериалами, начиная с теории построения универсальных расчетных моделей для армогрунтовых массивов и кончая алгоритмами и программами их численной реализации, является на сегодняшний день чрезвычайно актуальной задачей.

Сам метод конечных элементов (*МКЭ*) или, по крайней мере, его принципы, известен уже более полувека, но настоящее признание он получил лишь с развитием современных средств информатики. В настоящее время в мире публикуется значительное количество научных работ, посвященных дальнейшему развитию и применению *МКЭ* в прикладных задачах.

Метод конечных элементов позволяет с некоторой степенью приближения рассчитывать напряженно-деформированное состояние среды при отклонении зависимости «напряжение-деформация» от линейной. Тогда решение осуществляется путем последовательного приближения: в каждом приближении среда рассматривается как линейно деформируемая, а ее параметры корректируются в зависимости от напряжений, действующих на отдельных участках.

Рассмотрим приложение вариационных способов решения задач теории упругости для вывода основного уравнения метода конечных элементов. При решении краевых задач механики грунтов удобно исходить, как уже было сказано, из вариационного принципа Лагранжа, когда на действительных перемещениях полная потенциальная энергия рассматриваемого объема упругой грунтовой среды *Э* достигает минимума (3). Иначе говоря, решение задач *МКЭ* сводится к задаче о минимизации функционала

$$Э = \frac{1}{2}\int_{v} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV - A, \qquad (1)$$

где σ_{ij} - тензор напряжений; ε_{ij} - тензор деформаций; A - работа внешних сил; V - объем исследуемой области.

Выражение (1) можно представить в виде

$$Э = \frac{1}{2}\int_{v}\left(\frac{\varepsilon^2}{6k} + \frac{1}{2}G\Gamma^2\right)dV - A, \qquad (2)$$

где k- модуль объемной деформации, $k = \dfrac{1-2\nu}{E}$; G-модуль сдвига, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$; Γ - интенсивность деформации сдвига.

С учетом известных формул [4] $\varepsilon^2 = \{\varepsilon\}^T [D_0]\{\varepsilon\}$; $\Gamma^2 = \{\varepsilon\}^T [D_0]\{\varepsilon\}$;

$$[D_2] = [D_1] - \frac{2}{3}[D_0] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}[A][0] \\ [0][E] \end{pmatrix}; \qquad [A] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$[D_0] = \begin{pmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix}; \quad [D_1] = \begin{pmatrix} 2[E] & [0] \\ [0] & [E] \end{pmatrix};$$

где $[0], [E]$ - соответственно нулевая и единичная матрица размером 3х3;

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

{e} - вектор деформаций, $\{\varepsilon\}^T = \left(\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\right)$; формулу (2) можно представить в матричной форме

$$Э = \frac{1}{2}\int_{v}\left(\frac{1}{6k} + \{\varepsilon\}^T\left[D_0\right]\{\varepsilon\} + \frac{1}{2}G\{\varepsilon\}^T\left[D_2\right]\{\varepsilon\}\right)dV - A. \tag{3}$$

Перегруппировав соотношение (3) получим

$$Э = \frac{1}{2}\int_{v}\{\varepsilon\}^T\left[D^e\right]\{\varepsilon\}dV - A. \tag{4}$$

где - $\left[D^e\right]$ матрица упругости,

$$\left[D^e\right] = \frac{1}{3k}\left[D_0\right] + G\left[D_2\right].$$

Исследуемую область разобьем на N конечных элементов. При этом внешнюю нагрузку приведем к узлам, что позволяет работу внешних сил представить в виде:

$$A = \sum_{n=1}^{N}\{U\}^T\{F\}, \tag{5}$$

где $\{U\}$ - вектор узловых перемещений; $\{F\}$ - вектор узловых сил.

Выразим вектор деформаций через вектор узловых перемещений:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\} &= [B]\{U\},\\ \{\varepsilon\}^T &= \{U\}^T[B]^T,\end{aligned} \tag{6}$$

где $[B]$ - известная матрица градиентов [1,4].

Подставляя (5) и (6) в выражение для функционала потенциальной энергии, получаем:

$$Э = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{U\}^T\int_{V_n}[B]^T\left[D^e\right][B]dV\{U\} - \sum_{n=1}^{N}\{U\}^T[F], \tag{7}$$

или $$Э = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{U\}^T[k]\{U\} - \sum_{n=1}^{N}\{U\}^T[k]\{F\}, \tag{8}$$

где $[k]$ - матрица жесткости n-го элемента, $[k] = \int_{V_n}\left([B]^T\left[D^e\right][B]\right)dV$; V_n - исследуемый объем.

Минимизируя выражение (8), получим:

$$\frac{\partial Э}{\partial\{U\}}=\sum_{n=1}^{N}([k]\{U\}-\{F\})=0\cdot \qquad (9)$$

Здесь:

- матрица $\{F\}$ - вектор, состоящий из *3N* членов, являющихся компонентами сил, приложенных к узлам элементов. Называется вектором узловых сил;

- матрица $\{U\}$ - вектор, состоящий из *3N* компонентов перемещений узлов элементов. Называется вектором узловых перемещений;

- матрица $[k]$ - квадратная матрица порядка *3N*, связывающая узловые силы и узловые перемещения, называемая обобщенной матрицей жесткости системы. Это и есть основное матричное уравнение метода конечных элементов.

Таким образом, задача теории упругости сводится к решению системы уравнений (9). При этом система (9) - нормальная, т.е. матрица жесткости системы симметричная и положительно определенная, кроме того, она имеет ленточную структуру и сильно разрежена. Все это делает *МКЭ* легко реализуемым на *ЭВМ*.

Выводы. Очевидно, что для успешного решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния большое значение имеет тип принимаемой расчетной схемы и порядок идеализации ей реального геотехнического сооружения. Элементами конечно-элементной модели в общем виде являются любые объекты, которые могут участвовать в расчете или просто должны быть изображены на схеме, как вспомогательные условные обозначения.

References:

1. *Zenkevich OS, Taylor RL. The Finite Element Method. (Editions 4, 5 in English, language).*
2. *Zenkevich OS. Finite element method in the art. Moscow: Mir; 1979; 106.*
3. *Goldstein MN. Mechanical properties of soils (stress - deformability and strength characteristics). Moscow: Stroiizdat; 1979; 304.*
4. *Zenkevich OS, Morgan K. Finite elements and approximation. Moscow: Mir; 1986; 112.*
5. *Strang G, Fix G. Theory of finite element method. Moscow: Mir; 1977; 118.*