Nodir Sh. Ibragimov,
PhD student,
Termez State University

Developing Pupils' and Students' Mathematical Abilities by Solving Geometric Tasks

Key words: *mathematical abilities, logic, memory, generalization, thinking, space imagination.*

Annotation: *this article discusses the method of compiling tasks that contributes to the development of the mathematical abilities of high school students.*

Широкомасштабные реформы, проводимые в нашей стране, процессы изменений и обновления в сфере образования страны, служат целям воспитания молодого поколения, их всестороннего совершенствования, поколения, обладающих самостоятельным мышлением. Примером этого являются новшества в различных методиках обучения, направленные на укрепление знаний молодёжи, выявления их способностей. В данном процессе актуальной задачей является проблема определения и развития математических способностей. Значимым является задача повышения результативности и эффективности образования на основе использования современных технологий, иновационно- педагогических форм обучения, повышения качества образования с помощью определения и поддержки способной молодёжи.

По этой тематике специалистами данной сферы изданы ряд работ. В них изучены различные аспекты проблемы определения и развития математических способностей учеников (1-7).

Следует упомянут , что в книге В.А.Крутетского (1) ,с научной точки зрения, были изучены компоненты математических способностей учеников 5-6 классов и были разработаны 9 видов компонентов математических способностей учеников. Утаровым Т.У. (2) были внедрены 12 компонентов математических способностей учеников 7-9 классов.

Костиной Е.А. (3) была разработана для студентов вузов структура математических способностей. Однако, в этих работах не обращалось внимание на методику составления задач развития компонентов математических способностей и их решения.

Остановимся на геометрических задачах развития компонентов математических способностей студентов.

Это следующие компоненты.

1. Способность схватывать формальную структуру задачи.
2. Логичность математического мышления.
3. Способность к обобщению математического материала.
4. Ообратимость математического мышления.
5. Способность к свертыванию математического рассуждения.
6. Способность гибкость математического мышления.

7. Способность рационального математического мышления.
8. Когнитивная память и т.д.

I. **Способность схватывать формальную структуру задачи** – способность выделить из условия задачи максимально полезную информацию для её решения. Представление считается целостным образом этого. Понимание его формы, его размеров, постоянство цвета имеет большое значение на практике. Содержание представления определяется задачами, поставленные перед человеком, а также, причинами его деятельности. В процессе восприятия с помощью анализа, определённые чувства образуют рецептивную сторону восприятия. Понимание студентом текста в ходе занятия включает в себя восприятие зрением и слухом.

Пространственное восприятиеғ - является способность извлечь из условий задачи максимально полезную для ее решения информацию необходимым условием определения среды , окружающей человека. Оно является отражением объективно существующего пространства и включает в себя восприятие формы объектов, их объёма и взаиморасположение, их уровень, удалённость и направленность. Восприятие студентов старших курсов будет более целенаправленным и они смогуть сами управляить ими. В процессе целенаправленного руководства преподавателем деятельности студентов, их восприятие будет развиваться. На занятии студенты будут усваивать знания путём восприятия устного объяснения преподавателя. Восприятие изложенного устно материала тесно связано с особенностями речи преподавателя.

Развитию способность схватывать формальную структуру задачи будет способствовать использование данной задачи .

Задача. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

Решение. Пусть A, B, C – точки касания сторон треугольника с окружностью, O – центр окружности и S – точка на перпендикуляре (рис.1). *S выражает процесс пространственного восприятия студентом выбора точки перпендикуляра. Т*ак как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме о трех перпендикулярах отрезок

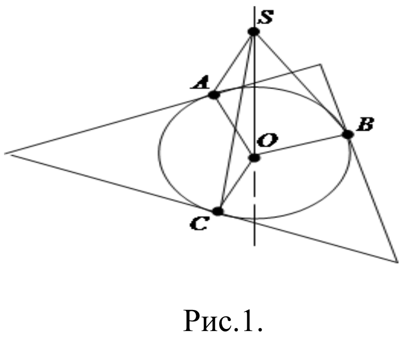

Рис.1.

SA есть перпендикуляр к этой стороне, а его длина – расстояние от точки S до стороны треугольника. По теореме Пифагора $SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2}$, где r – радиус вписанной окружности. Аналогично находим $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$, $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$, т.е. все расстояния от точки S до сторон треугольника равны

Эта задача будет способствовать развитию у студента способности понимания формальной структуры пространства.

(8)- Задачи 2.2.6, 2.2.8, 2.2.17, в сборнике задач, могуть быть использованы в качестве задач, для развития у студентов схватывать формальной структуры пространства.

II. Логичность математического мышления – способность правильно проводить последовательное математическое рассуждение. Запоминание логических характеристик, доказательство теорем, решения различных задач начинается с логически- лингвистического анализа.

1) определение математических выражений и их соответствующих знаков текста; 2) определение логических связей в тексте; 3) нахождение открытых и скрытых выражений содержания и смысла; 4) избавления от ненужных содержаний моделей. Переход математического мышления от простого языка к логическому математическому языку является одним из элементов знания. Иначе говоря, студент должен понять логическую структуру разговора, перехода от языка формул к знаковым записям и обратно. Понимание текста и логическая работа над ним, например, при наличие противоречивых мыслей, требует от студента ума и сообразительности. При передаче информации он должен обратить внимание на правильное использование того или иного языка и связанную речь. Такой подход даст хорошие результаты при формировании у студентов логической культуры.

При усвоении основных элементов логики необходимо: 1) правильно выражать постоянные математические мысли или теоремы 2) прежде всего, надо правильно понять, а потом рассказать, какие понятия мы изучаем, условия и выводы теоремы, использование таких связок как «и» и « или», о каких условиях идёт речь; 3) использование отрицания математических выводов законов de Morgan в виде кванторов и некванторов; 4) дать представление студентам о методах доказательства теорем; 5) **при преподавании геометрии объяснить аксиоматические строение основных логических принципов математических теорий.**

При развитии способностей логического мышления при изучении математики было бы целесообразно использовать следующие задачи

Задача. Каждый отрезок содержит по крайней мере одну точку.

Решение. Пусть A и B – концы отрезка (рис.2). по аксиоме I_3 вне прямой AB есть точка C. Возьмем на прямой AC точку D так, чтобы C была между A и D. Это возможно по аксиоме II_4. *Это соображение будет для студентов первым шагом, выбор точки D которая не лежит на отрезке* AB

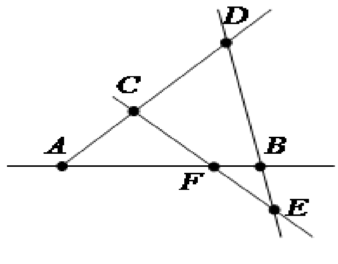

Рис.2.

будет доказательством наличия у студентов логического мышления. Возьмем на прямой BD точку E так, чтобы B была между D и E. Прямая CE разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки B и D находятся в одной полуплоскости, так как отрезок BD не пересекает прямую CE, а точки A и D в разных полуплоскостях, так как отрезок AD пересекает прямую CE (в точке C). Отсюда следует, что точки A и B находятся в разных полуплоскостях, а значит, отрезок AB пересекает прямую CE. Точка пересечения F и есть точка отрезка AB.

Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой. Фигура, составленная из трех отрезков AB, BC и CA, называется *треугольником*, точки A, B, C – *вершинами* треугольника, а отрезки AB, BC, CA – *сторонами*.

Задача данного типа даёт возможность студентам понять аксиоматическую структуру основных логических принципов математических теорий при обучении геометрии и, таким образом, развивает способности логического мышления у студентов.

Задачи 2.2.3, 2.2.7, 2.2.14, 2.2.20 сборника заданий (8)- можно использовать для развития у студентов способности логического мышления на примере вышеуказанных заданий.

III. Способность к обобщению математического материала– способность увидеть общее в разных задачах, выделить главное в методе решения, обобщить метод решения. В психологии обобщение определяется как объединение основных свойств предметов и событий в один общий объект. В логике эта категория считается одной из основ процесса мышления. С его помощью реализуется поиск важнейших свойств, характерных для целого класса предметов. Дидактическая сущность обобщения – выделение общих, важнейших свойств и характеристик изучаемого предмета,а также, формирование и выражение понятий, законов, которые приводят к пониманию изучаемого предмета.

Чтобы получить полную картину изучаемого объекта и событий, процесс обобщения начинается с **активизации внимания, мышления, памяти и воображения**. В системе образовании объектом обобщения могут быть свойства предметов, реальные события, особенности и свойства, отношения, связи, процессы. Чем сложнее объект, тем сложнее студенту обобщить материал.

В тоже время мышление даёт возможность выделить в изучаемом материале основные понятия, характеристики, отношения. В процессе мышления путём сопоставления можно определить общие важные свойства и отношения объектов или событий. Процесс обобщения, представляя собой комплексную работу мышления, включает в себя **представления, анализ, синтез, сравнение, память и понятия**, даёт возможность сделать выводы о передовых идеях процессов или событий, выразить определённые закономерности. При развитии способности обобщения целесообразно было бы использование следующих задач

Задача. Докажите, что если фигура F_1 подобна фигуре F_2, а фигура F_2 подобна фигуре F_3, то фигуры F_1 и F_3 подобны.

Решение. Пусть X_1 и Y_1 – две произвольные точки фигуры F_1. Преобразование подобия, переводящее фигуру F_1 в F_2, переводит эти точки в точки X_2, Y_2, для которых $X_2Y_2 = k_1X_1Y_1$.

Преобразование подобия, переводящее фигуру F_2 в F_3, переводит точки X_2, Y_2 в точки X_3, Y_3, для которых $X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$.

Из равенств

$$X_2Y_2 = k_1X_1Y_1,\ X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$$

следует, что $X_3Y_3 = k_1k_2X_1Y_1$. *Установка точек X_1, Y_1 на точки X_2, Y_2 X_2 и Y_2 а, их на точки X_3, Y_3 и выводы сделанные из них требуетих реализации с помощью способности обобщения. Это в свою очередь означает замену фигуры F_1 на фигуру F_3.*

Следовательно, фигуры F_1 и F_3 – подобны, что и требовалось доказать.

Данный процесс развивает способность студента к обобщению.

Задачи 2.3.44, 2.3.47, 2.3.58 сборника задач (8) можно использовать для развития у студентов способность к обобщению математического материала в качестве вышеприведённых задач.

IV. Обратимость математического мышления - способность переключаться с прямого на обратный ход рассуждения. Этот вид способности упорядочение последовательности математических мыслей и, при необходимости, использование их в противоположном порядке. Эта мысль, использовать последовательность условий, ведущей к определённой мысли, в их противоположном смысле.

Для развитии обратимость математического мышления целесообразно использование задач данного типа.

Задача. Докажите, что преобразование симметрии относительно прямой является движением

Решение. Примем данную прямую за ось y декартовой системы координат (рис.3). Пусть произвольная точка $A(x; y)$ фигуры F переходит в точку $A'(x'; y')$ фигуры F'.

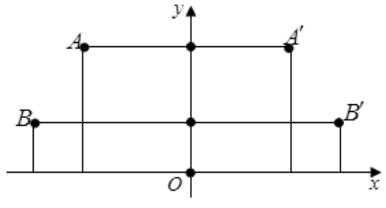

Рис.3.

Из определения симметрии относительно прямой следует, что у точек A и A' равные ординаты, а абсциссы отличаются только знаком: $x' = -x$.

Возьмем две произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Они перейдут в точки $A'(-x_1; y_1)$ и $B'(-x_2; y_2)$.

Имеем:

$$AB^2 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1),$$
$$A'B'^2 = (-x_2 + x_1) + (y_2 - y_1).$$

Отсюда видно, что $AB = A'B'$. А это значит, что преобразование симметрии относительно прямой есть движение.

Данная задача даёт возможность студентам упорядочить мысли и при необходимости использовать их наоборот, что способствует развитию у них способности противоположного математического мышления.

Задачи 2.3.6, 2.3.12, 2.3.28, 2.3.30 сборника задач (8) можно использовать для развития у студентов обратимость математического мышления на примере вышеуказанных задач.

V. Способность к свертыванию математического рассуждения - способность к самопроизвольному пропуску промежуточных утверждений в процессе решения задачи, не приводящему к ошибкам. Мысленное обсуждение, умение думать. Для развития способности к свертыванию математического рассуждения использование следующей задачи

Задача. Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

Решение. Пусть a – данная прямая (рис.4.). По аксиоме I_3 существует точка A, не лежащая на прямой a. В силу задачи 2 через прямую a и точку A можно провести плоскость, обозначим её α_1. По аксиоме I_8 существует точка B, не лежащая в плоскости α_1. Проведем через прямую a и точку B плоскость α_2.

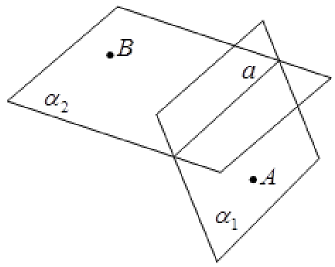

Рис.4.

Плоскости α_1 и α_2 различны, так как точка B плоскости α_2 не лежит на плоскости α_1.

Данная задача способствует развитию у студентов математического мышления.

Задачи 2.1.4, 2.1.6, 2.1.11, 2.1.24 в сборнике задач (8) можно использовать как задачи способствующие развитиюу способность к свертыванию математического рассуждения.

VI. Способность гибкость математического мышления – способность целенаправленно изменять действия при изменении условий задачи , а также, легко переходить от одного способа решения к другому.

Задача. При параллельном переносе точка $(1;1)$ переходит в точку $(-1;0)$. В какую точку переходит начало координат?

Решение. Любой параллельный перенос задается формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Данную формулу студент найдёт благодаря математической памяти и согласно условию, для нахождения точки смещения начала координат будет её использовать благодаря способности гибкость математического мышления. Так как точка $(1;1)$ переходит в точку $(-1;0)$, то $-1 = 1 + a, 0 = 1 + b$. Отсюда $a = -2, b = -1$. Таким образом наш параллельный перенос, переводящий точку $(1;1)$ в $(-1;0)$, задается формулами $x' = x - 2,\ y' = y - 1$. Подставляя в эти формулы координаты начала $(x = 0,\ y = 0)$, получим $x' = -2,\ y' = -1$. Итак, начало координат переходит в точку $(-2;-1)$.

Задачи 2.3.28, 2.3.29, 2.3.31 из сборника задач (8) можно использовать в качестве задач для развития способности гибкость математического мышления студентов.

VII. Способность рационального математического мышления - способность студента целесообразно выбирать метод решения (рассуждения), который с наименьшими затратами ведет к ответу задачи.

Для развития способности рационального математического мышления целесообразно использовать следующие задачи.

Задача. Пусть из точки O исходят две полупрямые a и b, не принадлежащие одной прямой. Тогда, если полупрямая h, исходящая из точки O, пересекает отрезок AB с концами на полупрямых a и b, то она пересекает любой другой отрезок с концами на этих полупрямых.

Решение. Ясно, что по условию задач отрезки AB и XY, полупрямые a и h находятся в одной из полуплоскостей, определяемых прямой, содержащей b, а дополнение h' полупрямой h до прямой (мы ее обозначим c) находится в другой полуплоскости. Применяя задачу 3 к треугольникам ABX и BXY и прямой c последовательно, заключаем, что она пересекает BX и YX.

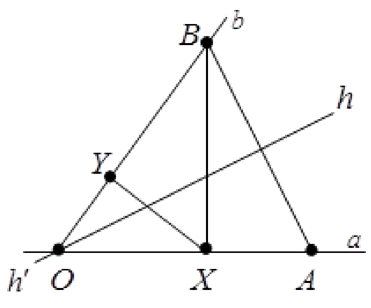

Рис.5.

Так как h' и XY находятся в разных полуплоскостях и, следовательно, не пересекаются, то отсюда следует, что h пересекает XY (рис.5)

Данная задача способствует развитию у студентов рационального математического мышления.

Задачи 2.2.7, 2.2.33, 2.2.38 из сборника задач (8) могут быть использованы в качестве заданий для развития у студентов способности рационального мышления.

VIII. Когнитивная память – способность актуализировать идею решения, а также способность помнить алгоритм решения.

Задача. Допустим, на производство 100 единиц определённой продукции затрачено 300 тысяч сум. Затраты на производство 500 единиц продукции составили 1300 тысяч сум. Если линия затрат представляет собой прямую линию, определите затраты на производство 400 единиц продкуции. Решение. Учитывая, что, при решении данной задачи, согласно условию функциия затрат линейная, то у студента появиться идея поиска актуального решения и условия задачи будут отражено на декартовой координатах следующим образом.

Даны точки A=(100,300); $B=(500,\ 1300)$. Согласно уравнению прямой линии проходящей через данные точки $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$,

$\frac{y-300}{1300-300}=\frac{x-100}{500-100}$, или $y=2{,}5x+50$

Это решение свидетельствует, что у студента заработала когнитивная память, так как, он смог использовать геометрическую формулу. Таким образом, для производства 400 единиц продукции будет затрачено 1050 тысячсумов.

Этот процесс развивает у студентов когнитивную память.

Задачи 2.2.46, 2.2.48, 2.2.56 из сборника задач (8) можно использовать в качестве заданий для развития когнитивной памяти у студентов.

References:

1. *Krutetsky VA. Psychology of mathematical abilities of schoolchildren. Moscow, 1998; 410.*
2. *Utapov TU. Methods of understanding and development of mathematical talent of students in mathematics education: Authuref ... cand. ped. science. Tashkent, 2008; 53.*
3. *Kostina EA. Differential education in mathematics at a technical college, taking into account the level of development of the components of a student's mathematical abilities: Thesis ... cand. ped. sciences. Omsk, 2009; 57.*

4. *Noskov MV, Shershneva VA. Mathematical training as an integrated component of the engineer's competence (analysis of educational state standards): Alma mater (Higher School Bulletin), 2005, № 7; 9-13.*
5. *Friedman LM. How to teach tasks solving?: Pedagogical bulletin, 1993, №7; 2-3.*
6. *Poya D. How to solve a task. Moscow, 1961.*
2. *Ibragimov NSh. About the Methods of Teaching Mathematical Skills of the Student: Scientific Journal, Samarkand, 2018, №1; 177-182.*
3. *Mamatov MSh, Boituraev AM. Collection of tasks on the basis of geometry. Tashkent, 2018; 120*